

# 1が並んだ数

2011年2月5日までのまとめ

2011年2月5日



# 目次

0.1	はじめに . . . . .	4
<b>第 1 章</b>	<b>1 が並んだ数とは</b>	<b>5</b>
1.1	1 が並んだ数とは . . . . .	5
<b>第 2 章</b>	<b>n 進数への拡張</b>	<b>9</b>
2.1	1 を並べる . . . . .	10
2.2	1 を並べる式 . . . . .	11
<b>第 3 章</b>	<b>素数との関わり</b>	<b>13</b>
3.1	1 が整数個並んだ多項式 . . . . .	13
3.1.1	$n^2 + n + 1$ . . . . .	13
3.1.2	$n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$ . . . . .	15
3.1.3	$n^6 + n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$ . . . . .	16
3.1.4	$n^{10} + n^9 + n^8 + n^7 + n^6 + n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$ . . . . .	17
3.1.5	$n^{12} + n^{11} + n^{10} + n^9 + n^8 + n^7 + n^6 + n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$ . . . . .	18
3.2	1 の数が素数個並んだ数の場合 . . . . .	20
<b>第 4 章</b>	<b>1 と 0 が並んだ数の場合</b>	<b>35</b>
4.1	1 と 0 が並んだ数の場合 . . . . .	35
4.1.1	10111 の場合 . . . . .	35
4.1.2	101111 の場合 . . . . .	37
4.1.3	101 の場合 . . . . .	37
4.1.4	1001 の場合 . . . . .	38
4.1.5	10001 の場合 . . . . .	38
4.1.6	その他の 1 と 0 の並んだ数 . . . . .	38
<b>第 5 章</b>	<b>規則的な 1 と 0 の並んだ数</b>	<b>55</b>
5.1	規則的な 1 と 0 の並んだ数 . . . . .	55
5.1.1	$x^n + 1$ の $n = 2^m$ . . . . .	55
5.1.2	$x^{2n+1} + x^n + 1$ 型 . . . . .	69
5.1.3	$x^{2n-1} + x^n + 1$ . . . . .	72
5.1.4	$x^{2n} + x^n + 1$ . . . . .	74
5.1.5	$x^{2n+2} + x^n + 1$ . . . . .	76

5.1.6	$x^{2n+3} + x^{2n+1} + x + 1$ . . . . .	78
5.1.7	素数探索 $x^8 + x^3 + 1$ . . . . .	79
5.1.8	素数探索 $x^7 + x^5 + x + 1$ . . . . .	81
5.1.9	素数探索 $x^9 + x^7 + x + 1$ . . . . .	83
5.1.10	$x^{2n+5} + x^{2n+3} + x^{2n+1} + 1$ . . . . .	85
5.1.11	素数探求 $x^7 + x^5 + x^3 + 1$ . . . . .	86
5.1.12	$x^{2n+4} + x^{2n+3} + x^{2n+2} + x^{2n+1} + 1$ . . . . .	88
5.1.13	$x^{2n+5} + x^{2n+3} + x^{2n+1} + 1$ . . . . .	90
5.1.14	$x^{2n+7} + x^{2n+5} + x^{2n+3} + x^{2n+1} + 1$ . . . . .	91
5.1.15	素数乗 . . . . .	92
5.1.16	$x^{\text{次の次の次の素数}} + x^{\text{次の次の素数}} + x^{\text{次の素数}} + x^{\text{素数}} + 1$ . . . . .	93
5.1.17	$x^{\text{次の素数}} + x^{\text{素数}} + 1$ . . . . .	94
5.1.18	素数探求 $x^5 + x^3 + x^2 + x + 1$ . . . . .	96
5.1.19	素数探求 $x^5 + x^3 + 1$ . . . . .	98

## 0.1 はじめに

1が並んだ数について考えてみましょう。

なお、私は数学は苦手だし、基礎知識もありません。もう結構な年なのでボケ防止をかねて、ただ、漫然とやっているわけですが、これまでのまとめをしてみようと思います。

といっても掲示板から書き写しただけなので、全然まとまっていませんし、整理もされていません。なお、TeXで書き直したときにページからはみ出してしまっている部分がありますが、特に意味がないと思いますのでそのままにしてあります。気になる場合は、Maximaで確認できます。

計算は数式処理言語Maximaを使っています。こいつはよく出来たソフトです。おかげで私はただ肉体労働ですんでいます。感謝感謝！

# 第1章 1が並んだ数とは

## 1.1 1が並んだ数とは

1が並んだ数について検討してみましょう。

1. 1が1個並んだ数

これは、1です。

2. 1が2個並んだ数

これは11で素数です。

では、2コの倍数個並んだ数はどうなるでしょうか。

$$\begin{aligned} 1111 &= 1100 + 11 = 11 \times 101 \\ 111111 &= 110000 + 1100 + 11 = 11 \times 10101 \end{aligned}$$

という風に1が2の倍数個並んだ数は全て11で割り切れます。無限のかなたまでそうです。

ここで、これに2,3,4,5,6,7,8,9をかけた22,33,44,55,66,77,88,99にも当てはまります。

ここで4個ずつ並んだ数は、

$$\begin{aligned} 2-4) \quad 1111 &= 1100 + 11 = 11 \times 101 \\ 2-8) \quad 11111111 &= 11000000 + 110000 + 1100 + 11 = 11 \times 1010101 = 11 \times (101000 + 101) = 11 \times (101 \times 10001) \\ 2-12) \quad 1111111111 &= 11 \times 10101010101 = 11 \times (101 \times 100010001) \\ 2-16) \quad 111111111111 &= 11 \times 101010101010101 = 11 \times (101 \times 1000100010001) = 11 \times 101 \times 1001 \times 100000001 \\ 2-20) \quad 11111111111111 &= 11 \times 1010101010101010101 = 11 \times (101 \times 10001000100010001) \end{aligned}$$

このように1と0の数に分解されます。

ここで6個ずつ並んだ数は、

$$\begin{aligned} 2-6) \quad 111111 &= 11 \times 10101 \\ 2-12) \quad 1111111111 &= 11 \times 10101010101 = 11 \times (10101 \times 1000001) \\ 2-18) \quad 111111111111 &= 11 \times 10101010101010101 = 11 \times (10101 \times 1000001000001) \end{aligned}$$

このように1と0の数に分解されます。

3. 1が3個並んだ数

$$111 = 3 \times 37$$

では、111の繰り返しの数は11の繰り返しのように111の倍数です。

4. 1が5個並んだ数

$$11111=41 \times 271$$

では、11111の繰り返しの数は11の繰り返しのように11111の倍数です。

#### 5. 1が7個並んだ数

$$1111111=239 \times 4649$$

では、1111111の繰り返しの数は11の繰り返しのように1111111の倍数です。

#### 6. 1が11個並んだ数

$$11111111111=21649 \times 513239$$

では、11111111111の繰り返しの数は11の繰り返しのように11111111111の倍数です。

#### 7. 1が13個並んだ数

$$1111111111111=53 \times 79 \times 265371653$$

では、1111111111111の繰り返しの数は11の繰り返しのように1111111111111の倍数です。

例えば、3個づつ並ぶとすると

$$\begin{aligned}
& 111,111,111,111,111,111,111,111,111,111 \\
& =111,000,000,000,000,000,000,000,000,000 \\
& + \quad 111,000,000,000,000,000,000,000,000 \\
& + \quad \quad 111,000,000,000,000,000,000,000 \\
& + \quad \quad \quad 111,000,000,000,000,000,000 \\
& + \quad \quad \quad \quad 111,000,000,000,000,000 \\
& + \quad \quad \quad \quad \quad 111,000,000,000,000 \\
& + \quad \quad \quad \quad \quad \quad 111,000,000 \\
& + \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 111 \\
& + \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 11 \\
& = 1,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000X111 \\
& + \quad 1,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000X111 \\
& + \\
& + \\
& \cdot \\
& \cdot \\
& + \\
& \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 1X111 \\
& = 1,001,001,001,001,001,001,001,001,001,001,001X111 \\
& = 1,001,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000X111 \\
& + \quad 1,001,000,000,000,000,000,000,000,000,000X111 \\
& + \quad \quad 1,001,000,000,000,000,000,000,000,000X111 \\
& + \quad \quad \quad 1,001,000,000,000,000,000,000,000X111 \\
& + \quad \quad \quad \quad 1,001,000,000,000,000,000,000,000X111 \\
& + \quad \quad \quad \quad \quad 1,001,000,000,000,000,000,000,000X111 \\
& + \quad \quad \quad \quad \quad \quad 1,001,000,000,000,000,000,000,000X111 \\
& + \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 1,001,000,000,000,000,000,000,000X111 \\
& = \quad 1,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000X111X1,001 \\
& + \quad \quad 1,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000X111X1,001 \\
& + \quad \quad \quad 1,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000X111X1,001 \\
& + \quad \quad \quad \quad 1,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000X111X1,001 \\
& + \quad \quad \quad \quad \quad 1X111X1,001 \\
& = \quad 1,000,001,000,001,000,001,000,001,000,001X111X1,001 \\
& = \quad 1,000,001,000,001,000,001,000,001X111X1,001 \\
& = \quad \quad 1,000,000,000,001,000,001X111X1,001X1,000,001
\end{aligned}$$

ああ、111 が足りなかった。

こんな具合に、説明すると 1 と 1 の間に 0 がいった数を約数にもつことがわかると思いますが....

111 を 2 つ並べるには

$$\begin{aligned} &111,111 \\ = &1,001X111 \end{aligned}$$

111,111 を 2 つならべるには

$$\begin{aligned} &111111,111111 \\ = &1,000001X111111 \end{aligned}$$

1111111,1111111 を 2 つ並べるには

$$\begin{aligned} &111111111111,111111111111 \\ = &1,000000000001X111111111111 \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} &1111111111111111111111111111,111111111111111111111111 \\ = &1,0000000000000000000000001X111111111111111111111111 \\ = &111X1001X1000001X1000000000001X1001 \end{aligned}$$

となり、これを繰り返してゆくと次のようにいえます。

1 と 1 の間の 0 の数は

$$2(=3-1), 5(=6-1), 11(=12-1), 23(=24-1), 47(=48-1), 95(=96-1), 191(=192-1), \dots$$

ということになります。

$$\begin{aligned} 111 &= 3X37 \\ 1001 &= 7X11X13 \\ 1000001 &= 101X9901 \\ 1000000000001 &= 73X137X99990001 \\ 1000000000000000000000001 &= 17X5882353X9999999900000001 \\ 100000000000000000000000000000000001 &= \\ &= 97X353X449X641X1409X69857X206209X66554101249X75118313082913 \end{aligned}$$

と maxima で素因数分解できました。

9901 から 99990001 となり 999 ... 001 となったのでつぎはと思いましたがみごとに外れました。

1000 ... 001 (95 個のときは)

$$\begin{aligned} &= 193X769X19841X976193X6187457X834427406578561X1253224535459902849X \\ &53763491189967221358575546107279034709697 \end{aligned}$$

となりました。0 の数が間違っなければですが....

$$\begin{aligned} &11,11 \\ = &1,01X11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &1111,1111 \\ = &1,0001X1111 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &11111111, 11111111 \\
 = &1, 00000001X11111111 \\
 \\ 
 &1111111111111111, 1111111111111111 \\
 = &1, 0000000000000001X1111111111111111 \\
 \\ 
 &111111111111111111111111111111, 111111111111111111111111111111 \\
 = &1, 000000000000000000000001X1111111111111111111111 \\
 &X111 \dots \text{全部で 32 個}
 \end{aligned}$$

この場合、1 と 1 の間の 0 の数は

$$1(=2-1), 3(=4-1), 7(=8-1), 15(=16-1), 31(=32-1), 63(=64-1), 127(=128-1), 255(=256-1), \dots$$

となりますね。

$$\begin{aligned}
 1111 &= 11 \times 101 \\
 10001 &= 73 \times 137 \\
 10000001 &= 17 \times 5882353 \\
 10000000000000001 &= 353 \times 449 \times 641 \times 1409 \times 69857 \\
 10000000000000000000000001 &= 19841 \times 976193 \times 6187457 \times 834427406578561 \\
 1001 &
 \end{aligned}$$

結構時間がかかっているがまだ素因数分解できない。やっとできました。

```
(%i1) factor(1111);
(%o1) 11 X 101
(%i2) factor(10001);
(%o2) 73 X 137
(%i3) factor(100000001);
(%o3) 17 X 5882353
(%i4) factor(100000000000000001);
(%o4) 353 X 449 X 641 X 1409 X 69857
(%i5) factor(10000000000000000000000001);
(%o5) 19841 X 976193 X 6187457 X 834427406578561
(%i6) factor(1000000000000000000000000000000000000000000001);
(%o6) 1265011073 X 15343168188889137818369 X 515217525265213267447869906815873
```



## 第2章 n進数への拡張

さて、1と0が並んだ部分は、1と0だけですから何進数でも同じです。n進数を10進数に変えるには、たとえば、10進数の1111は、

$$1111 = 1 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 1 \times 10^0$$

です。

ここで10進数をn進数に変えます。

$$\begin{aligned} 1111 &= 1 \times n^3 + 1 \times n^2 + 1 \times n^1 + 1 \times n^0 \\ &= n^3 + n^2 + n + 1 \end{aligned}$$

となりますね。

次の場合、

$$1111111 = n^6 + n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$$

となりますね。

そこでこれを因数分解します。

```
(%i21) factor(n^2+n+1);
(%o21)          2
              n  + n + 1
(%i22) factor(n^3+n^2+n+1);
(%o22)          2
              (n + 1) (n  + 1)
(%i23) factor(n^4+n^3+n^2+n+1);
(%o23)          4      3      2
              n  + n  + n  + n + 1
(%i24) factor(n^5+n^4+n^3+n^2+n+1);
(%o24)          2          2
              (n + 1) (n  - n + 1) (n  + n + 1)
(%i25) factor(n^6+n^5+n^4+n^3+n^2+n+1);
(%o25)          6      5      4      3      2
              n  + n  + n  + n  + n  + n + 1
(%i26) factor(n^7+n^6+n^5+n^4+n^3+n^2+n+1);
(%o26)          2          4
              (n + 1) (n  + 1) (n  + 1)
(%i27) factor(n^8+n^7+n^6+n^5+n^4+n^3+n^2+n+1);
(%o27)          2          6      3
              (n  + n + 1) (n  + n + 1)
(%i28) factor(n^9+n^8+n^7+n^6+n^5+n^4+n^3+n^2+n+1);
```

```

(%o28)      4 3 2      4 3 2
            (n + 1) (n - n + n - n + 1) (n + n + n + n + 1)
(%i29) factor(n^10+n^9+n^8+n^7+n^6+n^5+n^4+n^3+n^2+n+1);
            10 9 8 7 6 5 4 3 2
(%o29)      n + n + n + n + n + n + n + n + n + n + 1
(%i30) factor(n^11+n^10+n^9+n^8+n^7+n^6+n^5+n^4+n^3+n^2+n+1);
            2 2 2 4 2
(%o30)      (n + 1) (n + 1) (n - n + 1) (n + n + 1) (n - n + 1)
(%i31) factor(n^12+n^11+n^10+n^9+n^8+n^7+n^6+n^5+n^4+n^3+n^2+n+1);
            12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2
(%o31)      n + n + n + n + n + n + n + n + n + n + n + 1
(%i32) factor(n^13+n^12+n^11+n^10+n^9+n^8+n^7+n^6+n^5+n^4+n^3+n^2+n+1);
            6 5 4 3 2
(%o32)      (n + 1) (n - n + n - n + n - n + 1)
                                     6 5 4 3 2
                                     (n + n + n + n + n + n + 1)

```

以上の因数分解で2つ以上に分解された数は素数ではありません。ここでは、n進数の1が並んだ数を10進数で表しています。

## 2.1 1を並べる

そこで、nをいっぱい並べるのは大変なので  $\frac{10^n-1}{9}$  が10進数の1を並べる式だったことを思い出してn進数で1を並べる式は  $\frac{n^m-1}{n-1}$  となります。

試してみましょう。

```

(%i42) ratsimp((n^2-1)/(n-1));
(%o42)      n + 1
(%i43) ratsimp((n^3-1)/(n-1));
            2
(%o43)      n + n + 1
(%i44) ratsimp((n^4-1)/(n-1));
            3 2
(%o44)      n + n + n + 1
(%i45) ratsimp((n^5-1)/(n-1));
            4 3 2
(%o45)      n + n + n + n + 1
(%i46) ratsimp((n^6-1)/(n-1));
            5 4 3 2
(%o46)      n + n + n + n + n + 1
(%i47) ratsimp((n^7-1)/(n-1));
            6 5 4 3 2
(%o47)      n + n + n + n + n + n + 1
(%i48) ratsimp((n^8-1)/(n-1));
            7 6 5 4 3 2
(%o48)      n + n + n + n + n + n + n + 1
(%i49) ratsimp((n^9-1)/(n-1));
            8 7 6 5 4 3 2

```

```

(%o49)      n + n + n + n + n + n + n + n + n + 1
(%i50) ratsimp((n^10-1)/(n-1));
          9  8  7  6  5  4  3  2
(%o50)      n + n + n + n + n + n + n + n + n + 1
(%i51) ratsimp((n^11-1)/(n-1));
          10 9  8  7  6  5  4  3  2
(%o51)      n + n + n + n + n + n + n + n + n + n + 1
(%i52) ratsimp((n^12-1)/(n-1));
          11 10 9  8  7  6  5  4  3  2
(%o52)      n + n + n + n + n + n + n + n + n + n + n + 1
(%i53) ratsimp((n^13-1)/(n-1));
          12 11 10 9  8  7  6  5  4  3  2
(%o53)      n + n + n + n + n + n + n + n + n + n + n + n + 1

```

## 2.2 1を並べる式

では、証明します。

証明

$$n^{m-1} + n^{m-2} + n^{m-3} + \cdots + n^2 + n + 1 = P$$

とおくと

$$(n-1)P = nP - P = n^m - 1$$

故に

$$n^m - 1 = (n-1)(n^{m-1} + n^{m-2} + n^{m-3} + \cdots + n^2 + n + 1)$$

$$\frac{n^m - 1}{n-1} = n^{m-1} + n^{m-2} + n^{m-3} + \cdots + n^2 + n + 1$$

証明終わり



## 第3章 素数との関わり

多項式が因数分解できないとなれば、それは素数になるかもしれないということです。もちろん、数値にすれば、因数分解されることもあります。理屈からすれば素数にもなり得るわけです。そこで多項式を検討してみます。

### 3.1 1が整数個並んだ多項式

#### 3.1.1 $n^2 + n + 1$

さて、 $n^2 + n + 1$  は因数分解されていないので素数がある可能性がありますので  $n$  を変えてみましょう。

```
(%i2) factor((2^3-1)/(2-1));
(%o2) 7
(%i3) factor((3^3-1)/(3-1));
(%o3) 13
(%i4) factor((4^3-1)/(4-1));
(%o4) 3 X 7
(%i5) factor((5^3-1)/(5-1));
(%o5) 31
(%i6) factor((6^3-1)/(6-1));
(%o6) 43
(%i7) factor((7^3-1)/(7-1));
(%o7) 3 X 19
(%i8) factor((8^3-1)/(8-1));
(%o8) 73
(%i9) factor((9^3-1)/(9-1));
(%o9) 7 X 13
(%i10) factor((10^3-1)/(10-1));
(%o10) 3 X 37
(%i11) factor((11^3-1)/(11-1));
(%o11) 7 X 19
(%i12) factor((12^3-1)/(12-1));
(%o12) 157
(%i13) factor((13^3-1)/(13-1));
(%o13) 3 X 61
(%i14) factor((14^3-1)/(14-1));
(%o14) 211
(%i15) factor((15^3-1)/(15-1));
```

```
(%o15) 241
(%i16) factor((16^3-1)/(16-1));
(%o16) 3 X 7 X 13
(%i17) factor((17^3-1)/(17-1));
(%o17) 307
(%i18) factor((18^3-1)/(18-1));
(%o18) 3
7
(%i19) factor((19^3-1)/(19-1));
(%o19) 3 X 127
(%i20) factor((20^3-1)/(20-1));
(%o20) 421
```

2 から 20 まででは 4,7,9,10,11,13,16,18,19 は素数になりませんでした。

3.1.2  $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$ 

つぎは  $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$  は因数分解されていないので素数がある可能性がありますので  $n$  を変えてみましょう。

```
(%i1) factor((2^5-1)/(2-1));
(%o1) 31
(%i2) factor((3^5-1)/(3-1));
(%o2) 2
11
(%i3) factor((4^5-1)/(4-1));
(%o3) 11 X 31
(%i4) factor((5^5-1)/(5-1));
(%o4) 11 X 71
(%i5) factor((6^5-1)/(6-1));
(%o5) 5 X 311
(%i6) factor((7^5-1)/(7-1));
(%o6) 2801
(%i7) factor((8^5-1)/(8-1));
(%o7) 31 X 151
(%i8) factor((9^5-1)/(9-1));
(%o8) 2
11 X 61
(%i9) factor((10^5-1)/(10-1));
(%o9) 41 X 271
(%i10) factor((11^5-1)/(11-1));
(%o10) 5 X 3221
(%i11) factor((12^5-1)/(12-1));
(%o11) 22621
(%i12) factor((13^5-1)/(13-1));
(%o12) 30941
(%i13) factor((14^5-1)/(14-1));
(%o13) 11 X 3761
(%i14) factor((15^5-1)/(15-1));
(%o14) 11 X 4931
(%i15) factor((16^5-1)/(16-1));
(%o15) 5 X 11 X 31 X 41
(%i16) factor((17^5-1)/(17-1));
(%o16) 88741
(%i17) factor((18^5-1)/(18-1));
(%o17) 41 X 2711
(%i18) factor((19^5-1)/(19-1));
(%o18) 151 X 911
(%i19) factor((20^5-1)/(20-1));
(%o19) 11 X 61 X 251
```

2 から 20 までで、3,4,5,6,8,9,10,11,12,14,15,16,18,19,20 は素数にはなりませんでした。

### 3.1.3 $n^6 + n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$

つぎは  $n^6 + n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$  は因数分解されてないので素数がある可能性がありますので  $n$  を変えてみましょう。

```
(%i22) factor((2^7-1)/(2-1));
(%o22) 127
(%i23) factor((3^7-1)/(3-1));
(%o23) 1093
(%i24) factor((4^7-1)/(4-1));
(%o24) 43 X 127
(%i25) factor((5^7-1)/(5-1));
(%o25) 19531
(%i26) factor((6^7-1)/(6-1));
(%o26) 55987
(%i27) factor((7^7-1)/(7-1));
(%o27) 29 X 4733
(%i28) factor((8^7-1)/(8-1));
(%o28) 7 X 127 X 337
(%i29) factor((9^7-1)/(9-1));
(%o29) 547 X 1093
(%i30) factor((10^7-1)/(10-1));
(%o30) 239 X 4649
(%i31) factor((11^7-1)/(11-1));
(%o31) 43 X 45319
(%i32) factor((12^7-1)/(12-1));
(%o32) 659 X 4943
(%i33) factor((13^7-1)/(13-1));
(%o33) 5229043
(%i34) factor((14^7-1)/(14-1));
(%o34) 8108731
(%i35) factor((15^7-1)/(15-1));
(%o35) 7 X 1743463
(%i36) factor((16^7-1)/(16-1));
(%o36) 29 X 43 X 113 X 127
(%i37) factor((17^7-1)/(17-1));
(%o37) 25646167
(%i38) factor((18^7-1)/(18-1));
(%o38) 449 X 80207
(%i39) factor((19^7-1)/(19-1));
(%o39) 701 X 70841
(%i40) factor((20^7-1)/(20-1));
(%o40) 29 X 71 X 32719
```

2 から 20 までで 4,7,8,9,10,11,12,7,16,18,19,20 は素数になりませんでした。



3.1.4  $n^{10} + n^9 + n^8 + n^7 + n^6 + n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$ 

つぎは  $n^{10} + n^9 + n^8 + n^7 + n^6 + n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$  は因数分解されてないので素数がある可能性がありますので  $n$  を変えてみましょう。

```
(%i42) factor((2^11-1)/(2-1));
(%o42)          23 X 89
(%i43) factor((3^11-1)/(3-1));
(%o43)          23 X 3851
(%i44) factor((4^11-1)/(4-1));
(%o44)          23 X 89 X 683
(%i45) factor((5^11-1)/(5-1));
(%o45)          12207031
(%i46) factor((6^11-1)/(6-1));
(%o46)          23 X 3154757
(%i47) factor((7^11-1)/(7-1));
(%o47)          1123 X 293459
(%i48) factor((8^11-1)/(8-1));
(%o48)          23 X 89 X 599479
(%i49) factor((9^11-1)/(9-1));
(%o49)          23 X 67 X 661 X 3851
(%i50) factor((10^11-1)/(10-1));
(%o50)          21649 X 513239
(%i51) factor((11^11-1)/(11-1));
(%o51)          15797 X 1806113
(%i52) factor((12^11-1)/(12-1));
(%o52)          11 X 23 X 266981089
(%i53) factor((13^11-1)/(13-1));
(%o53)          23 X 419 X 859 X 18041
(%i54) factor((14^11-1)/(14-1));
(%o54)          67 X 4027 X 1154539
(%i55) factor((15^11-1)/(15-1));
(%o55)          67 X 463 X 2333 X 8537
(%i56) factor((16^11-1)/(16-1));
(%o56)          23 X 89 X 397 X 683 X 2113
(%i57) factor((17^11-1)/(17-1));
(%o57)          2141993519227
(%i58) factor((18^11-1)/(18-1));
(%o58)          23 199 X 16127 X 51217
(%i59) factor((19^11-1)/(19-1));
(%o59)          104281 X 62060021
(%i60) factor((20^11-1)/(20-1));
(%o60)          10778947368421
```

2 から 20 までで 5,17,20 だけ素数になりました。

### 3.1.5 $n^{12} + n^{11} + n^{10} + n^9 + n^8 + n^7 + n^6 + n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$

つぎは  $n^{12} + n^{11} + n^{10} + n^9 + n^8 + n^7 + n^6 + n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$  は因数分解されていないので素数がある可能性がありますので  $n$  を変えてみましょう。

```
(%i61) factor((2^13-1)/(2-1));
(%o61) 8191
(%i62) factor((3^13-1)/(3-1));
(%o62) 797161
(%i63) factor((4^13-1)/(4-1));
(%o63) 2731 X 8191
(%i64) factor((5^13-1)/(5-1));
(%o64) 305175781
(%i65) factor((6^13-1)/(6-1));
(%o65) 3433 X 760891
(%i66) factor((7^13-1)/(7-1));
(%o66) 16148168401
(%i67) factor((8^13-1)/(8-1));
(%o67) 79 X 8191 X 121369
(%i68) factor((9^13-1)/(9-1));
(%o68) 398581 X 797161
(%i69) factor((10^13-1)/(10-1));
(%o69) 53 X 79 X 265371653
(%i70) factor((11^13-1)/(11-1));
(%o70) 1093 X 3158528101
(%i71) factor((12^13-1)/(12-1));
(%o71) 477517 X 20369233
(%i72) factor((13^13-1)/(13-1));
(%o72) 53 X 264031 X 1803647
(%i73) factor((14^13-1)/(14-1));
(%o73) 13 X 157 X 29914249171
(%i74) factor((15^13-1)/(15-1));
(%o74) 53 X 157483 X 16655159
(%i75) factor((16^13-1)/(16-1));
(%o75) 53 X 157 X 1613 X 2731 X 8191
(%i76) factor((17^13-1)/(17-1));
(%o76) 212057 X 2919196853
(%i77) factor((18^13-1)/(18-1));
(%o77) 79 X 521 X 29759719289
(%i78) factor((19^13-1)/(19-1));
(%o78) 599 X 29251 X 133338869
(%i79) factor((20^13-1)/(20-1));
(%o79) 3121 X 142559 X 9690539
```

2 から 20 までで 2,3,5,7 のみ素数になりました。

1 が素数個並んだばあい、素数になる可能性があり、11 のように 2 の倍数個を持つ場合 11 ですから  $n + 1$  を因数にもち、111 のように 1 が 3 の倍数個たとえば 111111 は 6 個ですが 111 すなわち  $n^2 + n + 1$  を因数として持ちます。

この関係は、すでに説明しました。

ここで出てきた多項式は、1 を並べた数を進数を変えて書いているだけなのです。  
その並びの数によって素数を含まない多項式と含む可能性が多項式の因数分解で判別できますね。

### 3.2 1の数が素数個並んだ数の場合

そこで,1の数が素数の場合因数分解されないので,次のように指数部を変えてみました。 $\frac{x^n-1}{x-1}$ は, x進数の1が並んだ数ですが nによっては因数分解されてしまいます。nが素数ならそうなりません。

```
(%i22) factor((x^2-1)/(x-1));
(%o22) x + 1
(%i23) factor((x^3-1)/(x-1));
(%o23) x^2 + x + 1
(%i24) factor((x^5-1)/(x-1));
(%o24) x^4 + x^3 + x^2 + x + 1
(%i25) factor((x^7-1)/(x-1));
(%o25) x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1
(%i26) factor((x^11-1)/(x-1));
(%o26) x^10 + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1
(%i27) factor((x^13-1)/(x-1));
(%o27) x^12 + x^11 + x^10 + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1
(%i28) factor((x^17-1)/(x-1));
(%o28) x^16 + x^15 + x^14 + x^13 + x^12 + x^11 + x^10 + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1
(%i1) factor((x^19-1)/(x-1));
(%o1) x^18 + x^17 + x^16 + x^15 + x^14 + x^13 + x^12 + x^11 + x^10 + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1
(%i29) factor((x^23-1)/(x-1));
(%o29) x^22 + x^21 + x^20 + x^19 + x^18 + x^17 + x^16 + x^15 + x^14 + x^13 + x^12 + x^11 + x^10 + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1
(%i30) factor((x^29-1)/(x-1));
(%o30) x^28 + x^27 + x^26 + x^25 + x^24 + x^23 + x^22 + x^21 + x^20 + x^19 + x^18 + x^17 + x^16 + x^15 + x^14 + x^13 + x^12 + x^11 + x^10 + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1
(%i31) factor((x^31-1)/(x-1));
(%o31) x^30 + x^29 + x^28 + x^27 + x^26 + x^25 + x^24 + x^23 + x^22 + x^21 + x^20 + x^19 + x^18 + x^17 + x^16 + x^15 + x^14 + x^13 + x^12 + x^11 + x^10 + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1
```

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

このように因数分解されません。

なんとなく、メルセンヌ数の  $n$  進数への拡張みたいですね。 $\frac{2^5-1}{2-1} = 2^5 - 1$  でメルセンヌ数そのものですね。

メルセンヌ数の  $n$  進数の拡張はレピュニット数というらしい。

とはいえ、 $x$  によっては素因数分解されます。



$x = 3$  の場合、

```
(%i50) factor((3^2-1)/(3-1));
                                2
(%o50)                          2
(%i51) factor((3^3-1)/(3-1));
                                13
(%o51)                          13
(%i52) factor((3^5-1)/(3-1));
                                2
                                11
(%o52)                          11
(%i53) factor((3^7-1)/(3-1));
                                1093
(%o53)                          1093
(%i54) factor((3^11-1)/(3-1));
                                23 X 3851
(%o54)                          23 X 3851
(%i55) factor((3^13-1)/(3-1));
                                797161
(%o55)                          797161
(%i56) factor((3^17-1)/(3-1));
                                1871 X 34511
(%o56)                          1871 X 34511
(%i25) factor((3^19-1)/(3-1));
                                1597 X 363889
(%o25)                          1597 X 363889
(%i57) factor((3^23-1)/(3-1));
                                47 X 1001523179
(%o57)                          47 X 1001523179
(%i58) factor((3^29-1)/(3-1));
                                59 X 28537 X 20381027
(%o58)                          59 X 28537 X 20381027
(%i59) factor((3^31-1)/(3-1));
                                683 X 102673 X 4404047
(%o59)                          683 X 102673 X 4404047
(%i60) factor((3^37-1)/(3-1));
                                13097927 X 17189128703
(%o60)                          13097927 X 17189128703
(%i61) factor((3^41-1)/(3-1));
                                83 2526913 X 86950696619
(%o61)                          83 2526913 X 86950696619
(%i62) factor((3^43-1)/(3-1));
                                431 X 380808546861411923
(%o62)                          431 X 380808546861411923
(%i63) factor((3^47-1)/(3-1));
                                1223 X 21997 X 5112661 X 96656723
(%o63)                          1223 X 21997 X 5112661 X 96656723
(%i65) factor((3^53-1)/(3-1));
                                107 X 24169 X 3747607031112307667
(%o65)                          107 X 24169 X 3747607031112307667
(%i66) factor((3^59-1)/(3-1));
                                14425532687 X 489769993189671059
(%o66)                          14425532687 X 489769993189671059
(%i67) factor((3^61-1)/(3-1));
                                603901 X 105293313660391861035901
(%o67)                          603901 X 105293313660391861035901
(%i68) factor((3^67-1)/(3-1));
                                221101 X 441019876741 X 475384700124973
(%o68)                          221101 X 441019876741 X 475384700124973
```

$x = 4$  の場合、

```
(%i1) factor((4^2-1)/(4-1));
(%o1) 5
(%i2) factor((4^3-1)/(4-1));
(%o2) 3 X 7
(%i3) factor((4^5-1)/(4-1));
(%o3) 11 X 31
(%i4) factor((4^7-1)/(4-1));
(%o4) 43 X 127
(%i5) factor((4^11-1)/(4-1));
(%o5) 23 X 89 X 683
(%i6) factor((4^13-1)/(4-1));
(%o6) 2731 X 8191
(%i7) factor((4^17-1)/(4-1));
(%o7) 43691 X 131071
(%i8) factor((4^19-1)/(4-1));
(%o8) 174763 X 524287
(%i9) factor((4^23-1)/(4-1));
(%o9) 47 X 178481 X 2796203
(%i10) factor((4^29-1)/(4-1));
(%o10) 59 X 233 X 1103 X 2089 X 3033169
(%i11) factor((4^31-1)/(4-1));
(%o11) 715827883 X 2147483647
(%i12) factor((4^37-1)/(4-1));
(%o12) 223 X 1777 X 25781083 X 616318177
(%i13) factor((4^41-1)/(4-1));
(%o13) 83 X 13367 X 164511353 X 8831418697
(%i14) factor((4^43-1)/(4-1));
(%o14) 431 X 9719 X 2099863 X 2932031007403
(%i15) factor((4^47-1)/(4-1));
(%o15) 283 X 2351 X 4513 X 13264529 X 165768537521
(%i16) factor((4^53-1)/(4-1));
(%o16) 107 X 6361 X 69431 X 20394401 X 28059810762433
(%i17) factor((4^59-1)/(4-1));
(%o17) 2833 X 37171 X 179951 X 1824726041 X 3203431780337
(%i18) factor((4^61-1)/(4-1));
(%o18) 768614336404564651 X 2305843009213693951
(%i19) factor((4^67-1)/(4-1));
(%o19) 7327657 X 193707721 X 761838257287 X 6713103182899
```



$x = 5$  の場合、

```
(%i86) factor((5^2-1)/(5-1));
(%o86)          2 X 3
(%i87) factor((5^3-1)/(5-1));
(%o87)          31
(%i88) factor((5^5-1)/(5-1));
(%o88)          11 X 71
(%i89) factor((5^7-1)/(5-1));
(%o89)          19531
(%i90) factor((5^11-1)/(5-1));
(%o90)          12207031
(%i91) factor((5^13-1)/(5-1));
(%o91)          305175781
(%i92) factor((5^17-1)/(5-1));
(%o92)          409 X 466344409
(%i93) factor((5^19-1)/(5-1));
(%o93)          191 X 6271 X 3981071
(%i94) factor((5^23-1)/(5-1));
(%o94)          8971 X 332207361361
(%i95) factor((5^29-1)/(5-1));
(%o95)          59 X 35671 X 22125996444329
(%i96) factor((5^31-1)/(5-1));
(%o96)          1861 X 625552508473588471
(%i97) factor((5^37-1)/(5-1));
(%o97)          149 X 13971969971 X 8737481256739
(%i98) factor((5^41-1)/(5-1));
(%o98)          2238236249 X 5079304643216687969
(%i99) factor((5^43-1)/(5-1));
(%o99)          1644512641 X 172827552198815888791
(%i23) factor((5^47-1)/(5-1));
(%o23)          177635683940025046467781066894531
(%i100) factor((5^53-1)/(5-1));
bvp: 17154094481
(%o100)          5960555749 X 17154094481 X 27145365052629449
(%i1) factor((5^59-1)/(5-1));
(%o1)          21180247636732981 X 2047572230657338751575051
(%i101) factor((5^61-1)/(5-1));
bvp: 918585913061
(%o101)          8419 X 918585913061 X 140194179307171898833699259
(%i102) factor((5^67-1)/(5-1));
bvp: 2454335007529
(%o102)          269 X 1609 X 26399 X 2454335007529 X 604088623657497125653141
```

$x = 6$  の場合、

```
(%i20) factor((6^2-1)/(6-1));
(%o20)          7
(%i21) factor((6^3-1)/(6-1));
(%o21)          43
(%i22) factor((6^5-1)/(6-1));
(%o22)          5 X 311
(%i23) factor((6^7-1)/(6-1));
(%o23)          55987
(%i24) factor((6^11-1)/(6-1));
(%o24)          23 X 3154757
(%i25) factor((6^13-1)/(6-1));
(%o25)          3433 X 760891
(%i26) factor((6^17-1)/(6-1));
(%o26)          239 X 409 X 1123 X 30839
(%i27) factor((6^19-1)/(6-1));
(%o27)          191 X 638073026189
(%i28) factor((6^23-1)/(6-1));
(%o28)          47 X 139 X 3221 X 7505944891
(%i29) factor((6^29-1)/(6-1));
(%o29)          7369130657357778596659
(%i30) factor((6^31-1)/(6-1));
(%o30)          5333 X 49744740983476472807
(%i31) factor((6^37-1)/(6-1));
(%o31)          149 X 7919 X 12211 X 2569799 X 334286825813
(%i32) factor((6^41-1)/(6-1));
(%o32)          8648131 X 1854850885886497427178961
(%i33) factor((6^43-1)/(6-1));
(%o33)          173 X 431 X 7383359 X 1048953903129961695599
(%i34) factor((6^47-1)/(6-1));
(%o34)          930911329 X 45110836129 X 17821718159716147
(%i35) factor((6^53-1)/(6-1));
(%o35)          13781 X 357293834576449 X 7091531088740602980647
(%i36) factor((6^59-1)/(6-1));
(%o36)          4866979762781 X 29050941569087 X 11522163007228653937
(%i37) factor((6^61-1)/(6-1));
(%o37)          42461491 X 80057377 X 17252803354297421346943980322273
(%i38) factor((6^67-1)/(6-1));
(%o38)          904949028329910415467529 X 3023706637809542222940030043
```

$x = 7$  の場合、

```
(%i18) factor((7^3-1)/(7-1));
(%o18)          3 X 19
(%i19) factor((7^5-1)/(7-1));
(%o19)          2801
(%i20) factor((7^7-1)/(7-1));
(%o20)          29 X 4733
(%i21) factor((7^11-1)/(7-1));
(%o21)          1123 X 293459
(%i22) factor((7^13-1)/(7-1));
(%o22)          16148168401
(%i23) factor((7^17-1)/(7-1));
(%o23)          14009 X 2767631689
(%i24) factor((7^19-1)/(7-1));
(%o24)          419 X 4534166740403
(%i25) factor((7^23-1)/(7-1));
(%o25)          47 X 3083 X 31479823396757
(%i26) factor((7^29-1)/(7-1));
(%o26)          59 X 127540261 X 71316922984999
(%i27) factor((7^31-1)/(7-1));
(%o27)          311 X 21143 X 3999088279399464409
(%i28) factor((7^37-1)/(7-1));
(%o28)          223 X 2887 X 4805345109492315767981401
(%i29) factor((7^41-1)/(7-1));
(%o29)          83 X 20515909 X 4362139336229068656094783
(%i30) factor((7^43-1)/(7-1));
(%o30)          166003607842448777 X 2192537062271178641
(%i31) factor((7^47-1)/(7-1));
(%o31)          13722816749522711 X 63681511996418550459487
(%i32) factor((7^53-1)/(7-1));
(%o32)          8269 X 319591 X 38904276017035188056372051839841219
(%i33) factor((7^59-1)/(7-1));
(%o33)          459257 X 134927809 X 550413361 X 354639323684545612988577649
(%i34) factor((7^61-1)/(7-1));
(%o34)          367 X 4759 X 177237331 X 1914662449813727660680530326064591907
```

$x = 8$  の場合、

```
(%i1) factor((8^2-1)/(8-1));
                                     2
(%o1)                               3
(%i2) factor((8^3-1)/(8-1));
(%o2)                               73
(%i3) factor((8^5-1)/(8-1));
(%o3)                               31 X 151
(%i4) factor((8^7-1)/(8-1));
(%o4)                               7 X 127 X 337
(%i5) factor((8^11-1)/(8-1));
(%o5)                               23 X 89 X 599479
(%i6) factor((8^13-1)/(8-1));
(%o6)                               79 X 8191 X 121369
(%i7) factor((8^17-1)/(8-1));
(%o7)                               103 X 2143 X 11119 X 131071
(%i8) factor((8^19-1)/(8-1));
(%o8)                               32377 X 524287 X 1212847
(%i9) factor((8^23-1)/(8-1));
(%o9)                               47 X 178481 X 10052678938039
(%i10) factor((8^29-1)/(8-1));
(%o10)                              233 X 1103 X 2089 X 4177 X 9857737155463
(%i11) factor((8^31-1)/(8-1));
(%o11)                              2147483647 X 658812288653553079
(%i12) factor((8^37-1)/(8-1));
(%o12)                              223 x 321679 X 26295457 X 319020217 X 616318177
(%i13) factor((8^41-1)/(8-1));
(%o13)                              13367 X 3887047 X 164511353 X 177722253954175633
(%i14) factor((8^43-1)/(8-1));
(%o14)                              431 X 9719 X 2099863 X 11053036065049294753459639
(%i15) factor((8^47-1)/(8-1));
(%o15)                              2351 X 4513 X 13264529 X 4375578271 X 646675035253258729
(%i16) factor((8^53-1)/(8-1));
(%o16)                              6361 X 6679 X 69431 X 13960201 X 20394401 X 540701761 X 229890275929
(%i17) factor((8^59-1)/(8-1));
(%o17)                              179951 X 184081 X 27989941729 X 3203431780337 X 9213624084535989031
(%i18) factor((8^61-1)/(8-1));
(%o18)                              367 X 55633 X 2305843009213693951 X 37201708625305146303973352041
(%i19) factor((8^67-1)/(8-1));
(%o19)                              1609 X 22111 X 193707721 X 761838257287 X 87449423397425857942678833145441
```

$x = 9$  の場合、

```
(%i20) factor((9^2-1)/(9-1));
(%o20)          2 X 5
(%i21) factor((9^3-1)/(9-1));
(%o21)          7 X 13
(%i22) factor((9^5-1)/(9-1));
(%o22)          2
          11 X 61
(%i23) factor((9^7-1)/(9-1));
(%o23)          547 X 1093
(%i24) factor((9^11-1)/(9-1));
(%o24)          23 X 67 X 661 X 3851
(%i25) factor((9^13-1)/(9-1));
(%o25)          398581 X 797161
(%i26) factor((9^17-1)/(9-1));
(%o26)          103 X 307 X 1021 X 1871 X 34511
(%i27) factor((9^19-1)/(9-1));
(%o27)          1597 X 2851 X 101917 X 363889
(%i28) factor((9^23-1)/(9-1));
(%o28)          47 X 1001523179 X 23535794707
(%i29) factor((9^29-1)/(9-1));
(%o29)          59 X 523 X 6091 X 28537 X 5385997 X 20381027
(%i30) factor((9^31-1)/(9-1));
(%o30)          683 X 6883 X 102673 X 4404047 X 22434744889
(%i31) factor((9^37-1)/(9-1));
(%o31)          18427 X 107671 X 13097927 X 56737873 X 17189128703
(%i32) factor((9^41-1)/(9-1));
(%o32)          83 X 33703 X 2526913 X 86950696619 X 270547105429567
(%i33) factor((9^43-1)/(9-1));
bvp: 82064241848634269407
(%o33)          431 X 380808546861411923 X 82064241848634269407
(%i34) factor((9^47-1)/(9-1));
(%o34)          1223 X 16921 X 21997 X 256057 X 5112661 X 96656723 X 1534179947851
(%i35) factor((9^53-1)/(9-1));
(%o35)          107 X 24169 X 78719947 X 61557605176233223 X 3747607031112307667
(%i36) factor((9^59-1)/(9-1));
(%o36)          3187 X 14425532687 X 489769993189671059 X 1108439448677340328268341
```

$x = 10$  の場合、

```
(%i1) factor((10^2-1)/(10-1));
(%o1) 11
(%i2) factor((10^3-1)/(10-1));
(%o2) 3 X 37
(%i3) factor((10^5-1)/(10-1));
(%o3) 41 X 271
(%i4) factor((10^7-1)/(10-1));
(%o4) 239 X 4649
(%i5) factor((10^11-1)/(10-1));
(%o5) 21649 X 513239
(%i6) factor((10^13-1)/(10-1));
(%o6) 53 X 79 X 265371653
(%i7) factor((10^17-1)/(10-1));
(%o7) 2071723 X 5363222357
(%i8) factor((10^19-1)/(10-1));
(%o8) 1111111111111111111
(%i9) factor((10^23-1)/(10-1));
(%o9) 11111111111111111111
(%i10) factor((10^29-1)/(10-1));
(%o10) 3191 X 16763 X 43037 X 62003 X 77843839397
(%i11) factor((10^31-1)/(10-1));
(%o11) 2791 X 6943319 X 57336415063790604359
(%i12) factor((10^37-1)/(10-1));
(%o12) 2028119 X 247629013 X 2212394296770203368013
(%i13) factor((10^41-1)/(10-1));
(%o13) 83 X 1231 X 538987 X 201763709900322803748657942361
(%i14) factor((10^43-1)/(10-1));
(%o14) 173 X 1527791 X 1963506722254397 X 2140992015395526641
(%i15) factor((10^47-1)/(10-1));
(%o15) 35121409 X 316362908763458525001406154038726382279
(%i16) factor((10^53-1)/(10-1));
(%o16) 107 X 1659431 X 1325815267337711173 X 47198858799491425660200071
(%i17) factor((10^59-1)/(10-1));
(%o17) 2559647034361 X 4340876285657460212144534289928559826755746751
(%i18) factor((10^61-1)/(10-1));
(%o18) 733 X 4637 X 329401 X 974293 X 1360682471 X 106007173861643 X 7061709990156159479
(%i19) factor((10^67-1)/(10-1));
(%o19) 493121 X 79863595778924342083 X 28213380943176667001263153660999177245677
```

$x = 11$  の場合、

```
(%i36) factor((11^3-1)/(11-1));
(%o36)          7 X 19
(%i37) factor((11^5-1)/(11-1));
(%o37)          5 X 3221
(%i38) factor((11^7-1)/(11-1));
(%o38)          43 X 45319
(%i39) factor((11^11-1)/(11-1));
(%o39)          15797 X 1806113
(%i40) factor((11^13-1)/(11-1));
(%o40)          1093 X 3158528101
(%i41) factor((11^17-1)/(11-1));
(%o41)          50544702849929377
(%i42) factor((11^19-1)/(11-1));
(%o42)          6115909044841454629
(%i43) factor((11^23-1)/(11-1));
(%o43)          829 X 28878847 X 3740221981231
(%i44) factor((11^29-1)/(11-1));
(%o44)          523 X 303309617049998388989376043
(%i45) factor((11^31-1)/(11-1));
(%o45)          50159 X 2428541 X 157571957584602258799
(%i46) factor((11^37-1)/(11-1));
(%o46)          2591 X 36855109 X 136151713 X 2615418118891695851
(%i47) factor((11^41-1)/(11-1));
(%o47)          83 X 1231 X 27061 X 509221 X 14092193 X 29866451 X 840139875599
(%i48) factor((11^43-1)/(11-1));
(%o48)          1416258521793067 X 42534656091583268045915654719
(%i49) factor((11^47-1)/(11-1));
(%o49)          2069 X 22666879066355177 X 18806327041824690595747113889
(%i50) factor((11^53-1)/(11-1));
(%o50)          107 X 351497 X 6005113 X 6918082374901313855125397665325977135579
(%i51) factor((11^59-1)/(11-1));
bvp: 70845409351
(%o51)          1181 X 70845409351 X 33083146850190391025301565142735000331370209599
(%i52) factor((11^61-1)/(11-1));
bvp: 520518327319589
(%o52)          440177 X 520518327319589 X 1461808298382111034194027645506019619578037
```

$x = 12$  の場合、

```
(%i1) factor((12^2-1)/(12-1));
(%o1) 13
(%i2) factor((12^3-1)/(12-1));
(%o2) 157
(%i3) factor((12^5-1)/(12-1));
(%o3) 22621
(%i4) factor((12^7-1)/(12-1));
(%o4) 659 X 4943
(%i5) factor((12^11-1)/(12-1));
(%o5) 11 X 23 X 266981089
(%i6) factor((12^13-1)/(12-1));
(%o6) 477517 X 20369233
(%i7) factor((12^17-1)/(12-1));
(%o7) 2693651 X 74876782031
(%i8) factor((12^19-1)/(12-1));
(%o8) 29043636306420266077
(%i9) factor((12^23-1)/(12-1));
bvp: 321218438243
(%o9) 47 X 39891250417 X 321218438243
(%i10) factor((12^29-1)/(12-1));
(%o10) 59 X 24767 X 368939 X 3335672988472972523
(%i11) factor((12^31-1)/(12-1));
(%o11) 373 X 126883621 X 23364027983 X 234187563803
(%i12) factor((12^37-1)/(12-1));
(%o12) 3933841 X 196560666553286126588980353347341
(%i13) factor((12^41-1)/(12-1));
(%o13) 83 X 1977898057 X 97668924760419986491370101198871
(%i14) factor((12^43-1)/(12-1));
(%o14) 431 X 12313309 X 13444466603 X 32359758358562524963364461
(%i15) factor((12^47-1)/(12-1));
(%o15) 10617249990997021 X 4509348865973648037702008076799297
(%i16) factor((12^53-1)/(12-1));
bvp: 3089222210773
(%o16) 107 X 743 X 1694941 X 29504677 X 3089222210773 X 11639817348279944053139101
(%i17) factor((12^59-1)/(12-1));
(%o17) 22067 X 33565608845417661253 X 576319092656266231937955277485160608227
```



$x = 13$  の場合、

```
(%i53) factor((13^3-1)/(13-1));
(%o53)          3 X 61
(%i54) factor((13^5-1)/(13-1));
(%o54)          30941
(%i55) factor((13^7-1)/(13-1));
(%o55)          5229043
(%i56) factor((13^11-1)/(13-1));
(%o56)          23 X 419 X 859 X 18041
(%i57) factor((13^13-1)/(13-1));
(%o57)          53 X 264031 X 1803647
(%i58) factor((13^17-1)/(13-1));
(%o58)          103 X 443 X 15798461357509
(%i59) factor((13^19-1)/(13-1));
(%o59)          12865927 X 9468940004449
(%i60) factor((13^23-1)/(13-1));
(%o60)          1381 X 2519545342349331183143
(%i61) factor((13^29-1)/(13-1));
(%o61)          1973 X 2843 X 3539 X 846041103974872866961
(%i62) factor((13^31-1)/(13-1));
(%o62)          311 X 1117 X 8170509011431363408568150369
(%i63) factor((13^37-1)/(13-1));
(%o63)          1481 X 67495678093 X 4287755796749 X 31964044249933
(%i64) factor((13^41-1)/(13-1));
bpv: 6740847065723
(%o64)          6740847065723 X 58047259977349384372529747126587
(%i65) factor((13^43-1)/(13-1));
(%o65)          119627 X 552781743698966779174737704265497702530829
(%i66) factor((13^47-1)/(13-1));
(%o66)          183959 X 19216136497 X 534280344481909234853671069326391741
(%i67) factor((13^53-1)/(13-1));
(%o67)          107 194723 X 189541180943969 X 8403659652641423 X 274690322498001718403
(%i68) factor((13^59-1)/(13-1));
(%o68)          273997 X 5311771 X 30233706222041559662776806806113588758534692993333729
(%i69) factor((13^61-1)/(13-1));
(%o69)          4027 X 4759 X 7687 X 27817 X 92110001 X 4672993939 X 48401662036451 X
          87103671046409436847
```

5,7 が素数を持ちました。

17進数の1数が素数個の場合を調べてみました。

```
(%i70) factor((17^3-1)/(17-1));
(%o70)          307
(%i71) factor((17^5-1)/(17-1));
(%o71)          88741
(%i72) factor((17^7-1)/(17-1));
(%o72)          25646167
(%i73) factor((17^11-1)/(17-1));
(%o73)          2141993519227
(%i74) factor((17^13-1)/(17-1));
(%o74)          212057 X 2919196853
(%i75) factor((17^17-1)/(17-1));
(%o75)          10949 X 1749233 X 2699538733
(%i76) factor((17^19-1)/(17-1));
(%o76)          229 X 1103 X 202607147 X 291973723
(%i77) factor((17^23-1)/(17-1));
(%o77)          47 X 26552618219228090162977481
(%i78) factor((17^29-1)/(17-1));
(%o78)          59 X 7193 X 6088087 X 11658852700685942029849
(%i79) factor((17^31-1)/(17-1));
(%o79)          4093 X 6123493 X 347340647626008901939025023
(%i80) factor((17^37-1)/(17-1));
(%o80)          149 X 223 X 1016919604559540581 X 6218882581209875638403
(%i81) factor((17^41-1)/(17-1));
bpv: 18469031047049514697
(%o81)          83 X 892079 X 13365673 X 960217114820653 X 18469031047049514697
(%i82) factor((17^43-1)/(17-1));
(%o82)          1549 X 3075877724153666279633 X 1064542861270580708122635671
```

3,5,7,11 が素数を持ちました。

## 第4章 1と0が並んだ数の場合

### 4.1 1と0が並んだ数の場合

1と0が並んだ数の場合でも、多項式が因数分解できなければ、素数になる可能性があります。

#### 4.1.1 10111の場合

$\text{factor}(10111)=10111$  です。 $\text{factor}(n^4 + n^2 + n + 1) = n^4 + n^2 + n + 1$  でこれも素数候補があります。 $\text{factor}(\frac{n^5-1}{n-1} - n^3)$  となります。

```
(%i103) factor((2^5-1)/(2-1)-2^3);
(%o103) 23
(%i104) factor((3^5-1)/(3-1)-3^3);
(%o104) 2 X 47
(%i105) factor((4^5-1)/(4-1)-4^3);
(%o105) 277
(%i106) factor((5^5-1)/(5-1)-5^3);
(%o106) 4
2 X 41
(%i107) factor((6^5-1)/(6-1)-6^3);
(%o107) 13 X 103
(%i108) factor((7^5-1)/(7-1)-7^3);
(%o108) 2 X 1229
(%i109) factor((8^5-1)/(8-1)-8^3);
(%o109) 11 X 379
(%i110) factor((9^5-1)/(9-1)-9^3);
(%o110) 2
2 X 1663
(%i111) factor((10^5-1)/(10-1)-10^3);
(%o111) 10111
(%i112) factor((11^5-1)/(11-1)-11^3);
(%o112) 2 X 83 X 89
(%i113) factor((12^5-1)/(12-1)-12^3);
(%o113) 17 X 1229
(%i114) factor((13^5-1)/(13-1)-13^3);
(%o114) 3
2 X 3593
(%i115) factor((14^5-1)/(14-1)-14^3);
(%o115) 2
19 X 107
(%i116) factor((15^5-1)/(15-1)-15^3);
```

```
(%o116)                2 X 29 X 877
(%i117) factor((16^5-1)/(16-1)-16^3);
(%o117)                65809
(%i118) factor((17^5-1)/(17-1)-17^3);
(%o118)                2
                2 X 19 X 1103
(%i119) factor((18^5-1)/(18-1)-18^3);
(%o119)                105319
(%i120) factor((19^5-1)/(19-1)-19^3);
(%o120)                2 X 11 X 13 X 457
(%i121) factor((20^5-1)/(20-1)-20^3);
(%o121)                59 X 2719
```

したがって,1が並んだ数だけではありません。

## 4.1.2 101111 の場合

また、 $\text{factor}(101111)=101111$  です。 $\text{factor}(n^5 + n^3 + n^2 + n + 1) = n^5 + n^3 + n^2 + n + 1$  でこれも素数候補があります。 $\text{factor}(\frac{n^6-1}{n-1} - n^4)$  となります。ためしに  $n=2$  をいれると 47 と素数になります。

## 4.1.3 101 の場合

101 は  $n^2 + 1$  です。因数分解できません。 $n = 2$  のとき  $n^2 + 1 = 5$  で素数です。

```
(%i1) factor(3^2+1);
(%o1) 2 5
(%i2) factor(4^2+1);
(%o2) 17
(%i3) factor(5^2+1);
(%o3) 2 13
(%i4) factor(6^2+1);
(%o4) 37
(%i5) factor(7^2+1);
(%o5) 2
(%i6) factor(8^2+1);
(%o6) 5 13
(%i7) factor(9^2+1);
(%o7) 2 41
(%i8) factor(10^2+1);
(%o8) 101
(%i9) factor(11^2+1);
(%o9) 2 61
(%i10) factor(12^2+1);
(%o10) 5 29
(%i11) factor(13^2+1);
(%o11) 2 5 17
(%i12) factor(14^2+1);
(%o12) 197
(%i13) factor(15^2+1);
(%o13) 2 113
(%i14) factor(16^2+1);
(%o14) 257
```

4,6,10,14,16 が素数になりました。

## 4.1.4 1001の場合

同じように1001は $n^3 + 1$ です。しかし、

```
(%i19) factor(n^3+1);
```

```
(%o19) (n + 1) (n2 - n + 1)
```

となって素数にはなりません。

## 4.1.5 10001の場合

10001は $n^4 + 1$ です。

```
(%i21) factor(2^4+1);
```

```
(%o21) 17
```

```
(%i22) factor(3^4+1);
```

```
(%o22) 2 41
```

```
(%i23) factor(4^4+1);
```

```
(%o23) 257
```

```
(%i24) factor(5^4+1);
```

```
(%o24) 2 313
```

```
(%i25) factor(6^4+1);
```

```
(%o25) 1297
```

```
(%i26) factor(7^4+1);
```

```
(%o26) 2 1201
```

```
(%i27) factor(8^4+1);
```

```
(%o27) 17 241
```

```
(%i28) factor(9^4+1);
```

```
(%o28) 2 17 193
```

```
(%i29) factor(10^4+1);
```

```
(%o29) 73 137
```

```
(%i30) factor(11^4+1);
```

```
(%o30) 2 7321
```

```
(%i31) factor(12^4+1);
```

```
(%o31) 89 233
```

```
(%i32) factor(13^4+1);
```

```
(%o32) 2 14281
```

```
(%i33) factor(14^4+1);
```

```
(%o33) 41 937
```

```
(%i34) factor(15^4+1);
```

```
(%o34) 2 17 1489
```

```
(%i35) factor(16^4+1);
```

```
(%o35) 65537
```

2,4,6,16が素数になります。

## 4.1.6 その他の1と0の並んだ数

同様にして

```
(%i36) factor(n^5+1);
(%o36)          4      3      2
              (n + 1) (n - n + n - n + 1)
(%i37) factor(n^6+1);
(%o37)          2      4      2
              (n + 1) (n - n + 1)
(%i38) factor(n^7+1);
(%o38)          6      5      4      3      2
              (n + 1) (n - n + n - n + n - n + 1)
(%i39) factor(n^8+1);
(%o39)          8
              n + 1
```

となり、 $n^8 + 1$  は素数をもつ可能性があります

$$n^5 + 1 \quad 100001$$

$$n^6 + 1 \quad 1000001$$

$$n^7 + 1 \quad 10000001$$

は素数にはなりません。さらに

```
(%i1) factor(x^9+1);
(%o1)          2      6      3
              (x + 1) (x - x + 1) (x - x + 1)
(%i2) factor(x^10+1);
(%o2)          2      8      6      4      2
              (x + 1) (x - x + x - x + 1)
(%i3) factor(x^11+1);
(%o3)          10      9      8      7      6      5      4      3      2
              (x + 1) (x - x + x - x + x - x + x - x + x - x + 1)
(%i4) factor(x^12+1);
(%o4)          4      8      4
              (x + 1) (x - x + 1)
(%i5) factor(x^13+1);
(%o5)          12      11      10      9      8      7      6      5      4      3      2
              (x + 1) (x - x + x - x + x - x + x - x + x - x + x - x + 1)
(%i6) factor(x^14+1);
(%o6)          2      12      10      8      6      4      2
              (x + 1) (x - x + x - x + x - x + 1)
(%i7) factor(x^15+1);
(%o7)          2      4      3      2
              (x + 1) (x - x + 1) (x - x + x - x + 1)
(%i8) factor(x^16+1);
(%o8)          8      7      5      4      3
              (x + x - x - x - x + x + 1)
(%i9) factor(x^17+1);
;
(%o9)          16      15      14      13      12      11      10      9      8      7      6      5
              (x + 1) (x - x + x - x + x - x + x - x + x - x + x - x - x
              4      3      2
```

```

+ x - x + x - x + 1)
(%i10) factor(x^18+1);
          2      4      2      12      6
(%o10) (x + 1) (x - x + 1) (x - x + 1)
(%i11) factor(x^19+1);
          18      17      16      15      14      13      12      11      10      9      8
(%o11) (x + 1) (x - x + x - x + x - x + x - x + x - x + x
          7      6      5      4      3      2
          - x + x - x + x - x + x - x + 1)
(%i12) factor(x^20+1);
          4      16      12      8      4
(%o12) (x + 1) (x - x + x - x + 1)

```

より、9 から 20 のうち 16 つまり 10000000000000001 は素数をもつ可能性があります。10101 は

```

(%i1) factor(x^4+x^2+1);
          2      2
(%o1) (x - x + 1) (x + x + 1)

```

1001001 は

```

(%i2) factor(x^6+x^3+1);
          6      3
(%o2) x + x + 1

```

となり素数を含む可能性があります。では、100010001 は

```

(%i4) factor(x^8+x^4+1);
          2      2      4      2
(%o4) (x - x + 1) (x + x + 1) (x - x + 1)

```

10000100001 は

```

(%i5) factor(x^10+x^5+1);
          2      8      7      5      4      3
(%o5) (x + x + 1) (x - x + x - x + x - x + 1)

```

1000001000001 は

```

(%i6) factor(x^12+x^6+1);
          6      3      6      3
(%o6) (x - x + 1) (x + x + 1)

```

100000010000001 は

```

(%i7) factor(x^14+x^7+1);
          2      12      11      9      8      6      4      3
(%o7) (x + x + 1) (x - x + x - x + x - x + x - x + 1)

```

10000000100000001 は

```

(%i8) factor(x^16+x^8+1);
          2      2      4      2      8      4
(%o8) (x - x + 1) (x + x + 1) (x - x + 1) (x - x + 1)

```



1000000001000000001 は

```
(%i9) factor(x^18+x^9+1);
```

```
(%o9)          18    9
              x  + x  + 1
```

となり素数を含む可能性があります。

```
(%i10) factor(x^20+x^10+1);
```

```
(%o10) (x2 - x + 1) (x2 + x + 1) (x8 - x7 + x5 - x4 + x3 - x + 1)
                                             (x8 + x7 - x5 - x4 - x3 + x + 1)
```

10000000000100000000001 は

```
(%i11) factor(x^22+x^11+1);
```

```
(%o11) (x2 + x + 1) (x20 - x19 + x17 - x16 + x14 - x13 + x11 - x10 + x9 - x7
                                             + x6 - x4 + x3 - x + 1)
```

となりました。 $x^6 + x^3 + 1$  と  $x^{18} + x^9 + 1$  を除いて因数分解されましたので素数は含まれません。

以上のようにすれば、素数を含まない関数と含む可能性のある関数にわけることができます。さて、素数を含まない関数の応用は、なにかいいものがないですかね。数学の素因数分解の問題作成ツールとか何とか....

$x^4 + x^2 + 1$  という素因数分解される関数を調べてみました。

```
(%i1) factor(2^4+2^2+1);
(%o1) 3 X 7
(%i2) factor(3^4+3^2+1);
(%o2) 7 X 13
(%i3) factor(4^4+4^2+1);
(%o3) 3 X 7 x 13
(%i4) factor(5^4+5^2+1);
(%o4) 3 X 7 X 31
(%i5) factor(6^4+6^2+1);
(%o5) 31 X 43
(%i6) factor(7^4+7^2+1);
(%o6) 3 X 19 X 43
(%i7) factor(8^4+8^2+1);
(%o7) 3 X 19 X 73
(%i8) factor(9^4+9^2+1);
(%o8) 7 X 13 X 73
(%i9) factor(10^4+10^2+1);
(%o9) 3 X 7 X 13 X 37
(%i10) factor(11^4+11^2+1);
(%o10) 3 X 7 X 19 X 37
(%i11) factor(12^4+12^2+1);
(%o11) 7 X 19 X 157
(%i12) factor(13^4+13^2+1);
(%o12) 3 X 61 X 157
(%i13) factor(14^4+14^2+1);
(%o13) 3 X 61 X 211
(%i14) factor(15^4+15^2+1);
(%o14) 211 X 241
(%i15) factor(16^4+16^2+1);
(%o15) 3 X 7 X 13 X 241
(%i16) factor(17^4+17^2+1);
(%o16) 3 X 7 X 13 X 307
```

必ず1つ前行の因数を次の行にもっていますね。

```
(%i45) factor(x^4+x^2+1);
(%o45) (x2 - x + 1) (x2 + x + 1)
(%i46) factor((x+1)^4+(x+1)^2+1);
(%o46) (x2 + x + 1) (x2 + 3x + 3)
(%i47) factor((x+2)^4+(x+2)^2+1);
(%o47) (x2 + 3x + 3) (x2 + 5x + 7)
(%i48) factor((x+3)^4+(x+3)^2+1);
(%o48) (x2 + 5x + 7) (x2 + 7x + 13)
(%i49) factor((x+4)^4+(x+4)^2+1);
(%o49) (x2 + 7x + 13) (x2 + 9x + 17)
```

```
(%o49)          (x  + 7 x + 13) (x  + 9 x + 21)
```

なるほど、そうなるわけだ。

1111 = 11 × 101 から

```
=1100
+  11
=11x101
```

と簡単に分解できるので

$$x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1)$$

と簡単に求められます。

```
(%i2) factor(x^3+x^2+x+1);
```

```
(%o2)          (x + 1) (x  + 1)2
```

あってますね。同様に 111111 = 11 × 10101 から

```
=110000
+  1100
+    11
=11x10101
```

と簡単に分解できるので

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^4 + x^2 + 1)$$

間違っていないですね。

```
(%i3) factor(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1);
```

```
(%o3)          (x + 1) (x  - x + 1)2 (x  + x + 1)2
```

```
(%i7) factor(x^4+x^2+1);
```

```
(%o7)          (x  - x + 1)2 (x  + x + 1)2
```

したがって、1 が並んだ数の分解で式がある程度、因数分解できます。

1 と 0 の数列で同じ繰り返しがあれば、例えば、

```
101101011
=101100000
+   1011
=1011x100001
```

よって

$$x^8 + x^6 + x^5 + x^3 + x + 1 = (x^3 + x + 1)(x^5 + 1)$$

となります。

```
(%i1) factor(x^8+x^6+x^5+x^3+x+1);
          3          4    3    2
(%o1)      (x + 1) (x + x + 1) (x - x + x - x + 1)
(%i2) factor(x^5+1);
          4    3    2
(%o2)      (x + 1) (x - x + x - x + 1)
```

まあ、マイナスの係数までは分解できませんけれど...

式が与えられたときその係数が1,0の数列ならこれが使えます。

$$\begin{aligned}
 & (x+1)\{x^{n-1} - x^{n-2} + x^{n-3} - x^{n-4} + \cdots + x^2 - x + 1\} \\
 = & x^n + x^{n-1} - x^{n-1} - x^{n-2} + x^{n-2} + x^{n-3} - x^{n-3} - x^{n-4} + \cdots + x^3 + x^2 - x^2 - x + x + 1 \\
 & = x^n + 1
 \end{aligned}$$

となる。ただし、nは奇数。これで、 $x^n - 1$ と $x^n + 1$ の分解ができた。

```
(%i8) factor(x^3+1);
          2
(%o8)      (x + 1) (x - x + 1)
(%i9) factor(x^4+1);
          4
(%o9)      x + 1
(%i10) factor(x^5+1);
          4    3    2
(%o10)      (x + 1) (x - x + x - x + 1)
(%i11) factor(x^6+1);
          2          4    2
(%o11)      (x + 1) (x - x + 1)
(%i12) factor(x^7+1);
          6    5    4    3    2
(%o12)      (x + 1) (x - x + x - x + x - x + 1)
(%i13) factor(x^8+1);
          8
(%o13)      x + 1
(%i14) factor(x^9+1);
          2          6    3
(%o14)      (x + 1) (x - x + 1) (x - x + 1)
```

後ろの2項の積を展開すると

```
(%i15) expand((x^2-x+1)*(x^6-x^3+1));
          8    7    6    5    4    3    2
(%o15)      x - x + x - x + x - x + x - x + 1
```

さて、

```
(%i16) factor(x^10+1);
          2          8    6    4    2
(%o16)      (x + 1) (x - x + x - x + 1)
(%i17) factor(x^11+1);
          10    9    8    7    6    5    4    3    2
(%o17)      (x + 1) (x - x + x - x + x - x + x - x + x - x + 1)
```

さて、 $x^n + 1$  の  $n$  が偶数の場合、

```
(%i1) factor(x^2+1);
(%o1) x^2 + 1
(%i2) factor(x^4+1);
(%o2) x^4 + 1
(%i3) factor(x^6+1);
(%o3) (x^2 + 1) (x^4 - x^2 + 1)
(%i4) factor(x^8+1);
(%o4) x^8 + 1
(%i5) factor(x^10+1);
(%o5) (x^2 + 1) (x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1)
(%i6) factor(x^12+1);
(%o6) (x^4 + 1) (x^8 - x^4 + 1)
(%i7) factor(x^14+1);
(%o7) (x^2 + 1) (x^12 - x^10 + x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1)
(%i8) factor(x^16+1);
(%o8) x^16 + 1
(%i9) factor(x^18+1);
(%o9) (x^2 + 1) (x^4 - x^2 + 1) (x^12 - x^6 + 1)
(%i10) factor(x^20+1);
(%o10) (x^4 + 1) (x^16 - x^12 + x^8 - x^4 + 1)
(%i11) factor(x^22+1);
(%o11) (x^2 + 1) (x^20 - x^18 + x^16 - x^14 + x^12 - x^10 + x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1)
(%i12) factor(x^24+1);
(%o12) (x^8 + 1) (x^16 - x^8 + 1)
(%i13) factor(x^26+1);
(%o13) (x^2 + 1) (x^24 - x^22 + x^20 - x^18 + x^16 - x^14 + x^12 - x^10 + x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1)
(%i14) factor(x^28+1);
(%o14) (x^4 + 1) (x^24 - x^20 + x^16 - x^12 + x^8 - x^4 + 1)
```

をみると

```
(%i11) factor(x^22+1);
(%o11) (x^2 + 1) (x^20 - x^18 + x^16 - x^14 + x^12 - x^10 + x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1)
```

(%o11) (x + 1) (x - x + x - x + x - x + x - x + x - x + 1)

これを例にとって考えると  $y = x^2$  とすると、

$$\begin{array}{cccccccccccc} & 2 & & 20 & 18 & 16 & 14 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ (\%o11) & (x^2 + 1) & (x^{20} - x^{18} + x^{16} - x^{14} + x^{12} - x^{10} + x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1) \\ & & & & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ (y^{11}+1) & = & (y + 1) & (y^{10} - y^9 + y^8 - y^7 + y^6 - y^5 + y^4 - y^3 + y^2 - y + 1) \end{array}$$

となるので、同じですね。

```
(%i12) factor(x^24+1);
```

$$(\%o12) \quad (x^8 + 1) (x^{16} - x^8 + 1)$$

これは  $y = x^8$  とおくと

$$(y + 1)(y^2 - y + 1)$$

となりますので同じですね。

- > さて  $y=x^2$  とおくと  $y$  は 100 です。
- > したがって、 $y^5-1$  は 11111 ですが、1 が 100 なので
- >  $y^5-1$  は 100100100101 となります。
- >  $y=x^2+x$  なら  $y=110$  となります。

間違いました。

$$\begin{aligned} y^5-1 &= y^4+y^3+y^2+y+1 \\ &= x^8+x^6+x^4+x^2+1 \end{aligned}$$

まあ、

$$=101010101$$

ですね。

$$y^5-1=x^{10}-1 \text{ ですね。}$$

ところで、

```
(%i1) factor(x^8+x^6+x^4+x^2+1);
```

$$(\%o1) \quad (x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

```
(%i3) factor(x^10-1);
```

$$(\%o3) \quad (x - 1) (x + 1) (x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

これはどうしてかな。

ああ、間違っていた。

```
(%i4) factor(y^5-1);
```

$$(\%o4) \quad (y - 1) (y^4 + y^3 + y^2 + y + 1)$$

これで、あいました。

128桁の素数を暗号に使っているようですが、この素数でない式を使って暗号化すると糸口はありませんのでどうでしょうか。ただ使用する式がだいたいの数ですので、それをいくつか組み合わせているかによって指数関数的時間を要するので素数と結果は同じです。

$$111x1001*1000001=111111111111$$

のように

$$(x^2+x+1)(x^3+1)(x^6+1)=(x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$$

```
(%i6) expand((x^2+x+1)*(x^3+1)*(x^6+1));
```

```
(%o6)      11    10    9    8    7    6    5    4    3    2
           x  + x  + x  + x  + x  + x  + x  + x  + x  + x  + x  + 1
```

となりますので、

$$1111x10001x100000001=1111111111111111$$

$$(x^3+x^2+x+1)(x^4+1)(x^8+1)=x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^{11}+x^{10}+\dots+x^2+x+1$$

という具合に展開できるということですし、逆の因数分解もできるということです。

```
> 111x1001*1000001=1111111111111
111x1001
=111x1000
+ 111x1
=111111
```

で

```
111111x1000001
= 111111x1000000
+ 111111x1
= 111111111111
```

です。

$$(x^2 + x + 1)(x^3 + 1) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

また、

$$\frac{x^6 - 1}{x - 1} = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

より

$$(x^2 + x + 1)(x^3 + 1) = \frac{x^6 - 1}{x - 1}$$

同様に、

$$(x^2 + x + 1)(x^3 + 1)(x^6 + 1) = \frac{x^{12} - 1}{x - 1}$$

```
(%i1) expand((x^2+x+1)*(x^3+1)*(x^6+1));
```

```
(%o1)      11    10    9    8    7    6    5    4    3    2
           x  + x  + x  + x  + x  + x  + x  + x  + x  + x  + x  + 1
```

また

```
(%i8) ratsimp((x^12-1)/(x-1));
```

```
(%o8)      11    10    9    8    7    6    5    4    3    2
           x  + x  + x  + x  + x  + x  + x  + x  + x  + x  + x  + 1
```

よりありますね。



$(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1) = (x^{16}-1)/(x-1) = x^{15} + x^{14} + x^{13} + \dots + x^2 + x + 1$   
 ここで、 $x=2$  ならば、 $2^{16}-1$  は因数分解できる。

$$\begin{aligned} & (x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1) \cdots \{x^{(2^{(n-1)})}+1\} \\ &= \{x^{(2^0)}+1\}\{x^{(2^1)}+1\}\{x^{(2^2)}+1\}\{x^{(2^2 \cdot 2^2)}+1\} \cdots \{x^{(2^{(n-1)})}+1\} \\ &= [x^{\{1+2+4+8+16+\dots+2^{(n-1)}+1\}}-1]/(x-1) \\ &= [x^{(2^n)}-1]/(x-1) \end{aligned}$$

となる。

$x=2$  なら

$$\begin{aligned} & [x^{(2^n)}-1]/(x-1) \\ &= 2^{(2^n)}-1 \end{aligned}$$

は、因数分解できる。

$$\begin{aligned} & (x^2+x+1)(x^3+1)(x^6+1)(x^{12}+1)(x^{24}+1) \\ &= (x^6-1)/(x-1)(x^6+1)(x^{12}+1)(x^{24}+1) \\ &= (x^6-1)(x^6+1)(x^{12}+1)(x^{24}+1)/(x-1) \\ &= (x^{12}-1)(x^{12}+1)(x^{24}+1)/(x-1) \quad /* (x-a)(x+a)=x^2-a^2 \text{ より} */ \\ &= (x^{24}-1)(x^{24}+1)/(x-1) \\ &= (x^{48}-1)/(x-1) \end{aligned}$$

となる。これより、……

$$\begin{aligned} & (x^3+x^2+x+1)(x^4+1)(x^8+1)(x^{16}+1)(x^{32}+1) \\ &= (x^8-1)/(x-1)(x^8+1)(x^{16}+1)(x^{32}+1) \end{aligned}$$

・  
 ・

$$= (x^{64}-1)/(x-1)$$

となる。これより、……

$$\begin{aligned} & (x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)(x^{16}+1) \cdots [x^{\{2^{(n-1)}\}}+1] \\ &= (x^4-1)/(x-1)(x^4+1)(x^8+1)(x^{16}+1) \cdots [x^{\{2^{(n-1)}\}}+1] \end{aligned}$$

= ・  
 = ・

$$= [x^{(2n)}-1]/(x-1)$$

とした方がよかったかな。

では、確認します。

```
(%i1) factor((x^16-1)/(x-1));
(%o1) (x + 1) (x^2 + 1) (x^4 + 1) (x^8 + 1)
```

あってますね。

$$\begin{aligned} \frac{x^{16}-1}{x-1} &= (x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1) \\ x^{16}-1 &= (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1) \\ x^{16}-1 &= (x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1) \\ x^{16}-1 &= (x^4-1)(x^4+1)(x^8+1) \\ x^{16}-1 &= (x^8-1)(x^8+1) \\ x^{16}-1 &= x^{16}-1 \end{aligned}$$

```
(%i2) factor((x^48-1)/(x-1));
(%o2) (x + 1) (x^2 + 1) (x^2 - x + 1) (x^2 + x + 1) (x^4 + 1) (x^4 - x^2 + 1)
      8      8      4      16      8
      (x + 1) (x - x + 1) (x - x + 1)
```

ちょっと分解されすぎましたが、因数分解されることには代わりありません。

$$\frac{x^{48} - 1}{x - 1} =$$

$$(x + 1)(x^2 + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 + x + 1)(x^4 + 1)(x^2 - x + 1)(x^8 + 1)(x^8 - x^4 + 1)(x^{16} - x^8 + 1)$$

$$x^{48} - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)(x^4 + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x^8 + 1)(x^8 - x^4 + 1)(x^{16} - x^8 + 1)$$

$$x^{48} - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)(x^4 + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x^8 + 1)(x^8 - x^4 + 1)(x^{16} - x^8 + 1)$$

$$x^{48} - 1 = (x^4 - 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1)(x^{16} - x^8 + 1)$$

$$x^{48} - 1 = (x^8 - 1)(x^8 + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1)(x^{16} - x^8 + 1)$$

$$x^{48} - 1 = (x^{16} - 1)(x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)(x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1)(x^{16} - x^8 + 1)$$

$$x^{48} - 1 = (x^{16} - 1)((x^2 + 1)^2 - x^2)(x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1)(x^{16} - x^8 + 1)$$

$$x^{48} - 1 = (x^{16} - 1)(x^4 + 2x^2 + 1 - x^2)(x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1)(x^{16} - x^8 + 1)$$

$$x^{48} - 1 = (x^{16} - 1)(x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1)(x^{16} - x^8 + 1)$$

$$x^{48} - 1 = (x^{16} - 1)(x^4 + 1 + x^2)(x^4 + 1 - x^2)(x^8 - x^4 + 1)(x^{16} - x^8 + 1)$$

$$x^{48} - 1 = (x^{16} - 1)((x^4 + 1)^2 - x^4)(x^8 - x^4 + 1)(x^{16} - x^8 + 1)$$

$$x^{48} - 1 = (x^{16} - 1)(x^8 + 2x^4 + 1 - x^4)(x^8 - x^4 + 1)(x^{16} - x^8 + 1)$$

$$x^{48} - 1 = (x^{16} - 1)(x^8 + x^4 + 1)(x^8 - x^4 + 1)(x^{16} - x^8 + 1)$$

$$x^{48} - 1 = (x^{16} - 1)(x^8 + 1 + x^4)(x^8 + 1 - x^4)(x^{16} - x^8 + 1)$$

$$x^{48} - 1 = (x^{16} - 1)((x^8 + 1)^2 - x^8)(x^{16} - x^8 + 1)$$

$$x^{48} - 1 = (x^{16} - 1)(x^{16} + 2x^8 + 1 - x^8)(x^{16} - x^8 + 1)$$

$$x^{48} - 1 = (x^{16} - 1)(x^{16} + x^8 + 1)(x^{16} - x^8 + 1)$$

$$x^{48} - 1 = (x^{16} - 1)(x^{16} + 1 + x^8)(x^{16} + 1 - x^8)$$

$$x^{48} - 1 = (x^{16} - 1)((x^{16} + 1)^2 - x^{16})$$

$$x^{48} - 1 = (x^{16} - 1)(x^{32} + 2x^{16} + 1 - x^{16})$$

$$x^{48} - 1 = (x^{16} - 1)(x^{32} + x^{16} + 1)$$

$$x^{48} - 1 = x^{16}(x^{32} + x^{16} + 1) - (x^{32} + x^{16} + 1)$$

$$x^{48} - 1 = x^{48} + x^{32} + x^{16} - x^{32} - x^{16} - 1$$

$$x^{48} - 1 = x^{48} - 1$$

うん、あっている。

```
> (x^2+x+1)(x^3+1)(x^6+1)(x^12+1)(x^24+1)
> =(x^48-1)/(x-1)
```

これは、

```
111x1001x100001x1000000000001x100000000000000000000000001
=(111x1000+111)x100001x1000000000001x1000000000000000000000001
=(111111x1000000+111111)x1000000000001x1000000000000000000000001
=(111111111111x1000000000000+111111111111)x100000000000000000000001
=11111111111111111111111111x10000000000000000000000000+11111111111111111111
=1111111111111111111111111111111111111111111111111111111
```

数を間違えているかも知れませんが1が並んだ数で説明するということなのです。

先にも触れましたように、1が並んだ数は別に2進数でもないし10進数でもありません。何進数でも同じです。それを $x$ と表しています。

まあ、無理に $x$ 進数であるとする必要はありません。単なる多項式で項の係数が1か0であるとしてもかまいません。ただ、 $x^2 - x + 1$ の $-x$ は上位桁から、借りるということですが...

$$x^2 - x + 1 = x(x - 1) + 1$$

たとえば、10進数なら  $x^2 - x + 1$  は  $100 - 10 + 1 = 91$  です。これは多項式表現です。 $x(x - 1) + 1$  は  $10 \times (10 - 1) + 1 = 91$  です。これは桁借りした表現です。

さて、

$$\begin{aligned} (x^{2n} + x^n + 1)(x^{2n} - x^n + 1) &= (x^{2n} + 1 + x^n)(x^{2n} + 1 - x^n) \\ &= (x^{2n} + 1)^2 - x^{2n} \\ &= x^{4n} + 2x^{2n} + 1 - x^{2n} \end{aligned}$$

$$(x^{2n} + x^n + 1)(x^{2n} - x^n + 1) = x^{4n} + x^{2n} + 1$$

となります。ために、

```
(%i2) ratsimp((x^2+x+1)*(x^2-x+1));
              4      2
(%o2)          x  + x  + 1
(%i3) ratsimp((x^4+x^2+1)*(x^4-x^2+1));
              8      4
(%o3)          x  + x  + 1
(%i4) ratsimp((x^8+x^4+1)*(x^8-x^4+1));
              16     8
(%o4)          x  + x  + 1
```

です。

すると、桁借りができればこれを応用すると $-x$ をなくせる方法になるかもしれません。

```
(%i17) ratsimp((x^3+x^2+x+1)*(x^3-x^2+1));
              6   3
(%o17)      x  + x  + x  + 1
(%i18) ratsimp((x^4+x^3+x^2+x+1)*(x^4-x^3+1));
              8   4   2
(%o18)      x  + x  + x  + x  + 1
(%i19) ratsimp((x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)*(x^5-x^4+1));
              10  5   3   2
(%o19)      x  + x  + x  + x  + x  + 1
```

これも面白い関係。

```
(%i20) ratsimp((x^3+x^2+x+1)*(x^3-x+1));
              6   5   3
(%o20)      x  + x  + x  + 1
(%i21) ratsimp((x^4+x^3+x^2+x+1)*(x^4-x+1));
              8   7   6   4
(%o21)      x  + x  + x  + x  + 1
(%i22) ratsimp((x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)*(x^5-x+1));
              10  9   8   7   5
(%o22)      x  + x  + x  + x  + x  + 1
(%i23) ratsimp((x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)*(x^6-x+1));
              12  11  10  9   8   6
(%o23)      x  + x  + x  + x  + x  + x  + 1
```

これもおもしろい。桁借りに対処する方法につかえるかもしれません。

```
(%i4) ratsimp((x^3+x+1)*(x^3-x^2+1));
              6   5   4   3   2
(%o4)      x  - x  + x  + x  - x  + x  + 1
(%i5) ratsimp((x^4+x+1)*(x^4-x^3+1));
              8   7   5   4   3
(%o5)      x  - x  + x  + x  - x  + x  + 1
(%i6) ratsimp((x^5+x+1)*(x^5-x^4+1));
              10  9   6   5   4
(%o6)      x  - x  + x  + x  - x  + x  + 1
(%i7) ratsimp((x^6+x+1)*(x^6-x^5+1));
              12  11  7   6   5
(%o7)      x  - x  + x  + x  - x  + x  + 1
(%i8)
```

これもおもしろいけど、 $-x^n$ をどうやって潰すか。

```
(%i11) ratsimp((x^3+x^2+1)*(x^3-x+1));
              6   5   4   3   2
(%o11)      x  + x  - x  + x  + x  - x  + 1
(%i12) ratsimp((x^4+x^3+1)*(x^4-x+1));
              8   7   5   4   3
(%o12)      x  + x  - x  + x  + x  - x  + 1
(%i13) ratsimp((x^5+x^4+1)*(x^5-x+1));
              10  9   6   5   4
```

```
(%o13)          x  + x  - x  + x  + x  - x  + 1
(%i14) ratsimp((x^6+x^5+1)*(x^6-x+1));
              12    11    7    6    5
(%o14)          x  + x  - x  + x  + x  - x  + 1
```



## 第5章 規則的な1と0の並んだ数

### 5.1 規則的な1と0の並んだ数

#### 5.1.1 $x^n + 1$ の $n = 2^m$

$x^n + 1$  の  $n = 2^m$  は因数分解できない。 $x^n + 1$  は  $n$  が奇数なら因数分解できることは以前説明しました。 $y = x^2$  としても  $x^n + 1 = y^{2^{m-1}} + 1$  となるだけで、どんどん置き換えても最後は  $v + 1$  となりこれは因数分解できないので  $x^n + 1$  の  $n = 2^m$  は因数分解できない。

ここで、 $x = 2$  の場合、フェルマー素数というらしい。

```
(%i1) factor(x+1);
(%o1) x + 1
(%i2) factor(x^2+1);
(%o2) x^2 + 1
(%i3) factor(x^4+1);
(%o3) x^4 + 1
(%i4) factor(x^8+1);
(%o4) x^8 + 1
(%i5) factor(x^16+1);
(%o5) x^16 + 1
(%i6) factor(x^32+1);
(%o6) x^32 + 1
(%i7) factor(x^64+1);
(%o7) x^64 + 1
(%i8) factor(x^128+1);
(%o8) x^128 + 1
(%i9) factor(x^256+1);
(%o9) x^256 + 1
(%i10) factor(x^512+1);
(%o10) x^512 + 1
(%i11) factor(x^1024+1);
(%o11) x^1024 + 1
```

```
(%o11) x + 1
(%i12) factor(x^2048+1);
      2048
(%o12) x + 1
(%i13) factor(x^4096+1);
      4096
(%o13) x + 1
(%i14) factor(x^8192+1);
      8192
(%o14) x + 1
(%i15)
```

このように、因数分解できない。したがって、この形の数は素数を含む可能性がある。

また、奇数のべき乗は奇数なので+1すると偶数になるから2で割れる。よって、 $x^{2^m} + 1$ において  $x$  が奇数のとき2で割れるので素数にならない。素数になるには  $x$  は偶数でなければならない。試しに、 $x = 2n + 1$  を代入してみると

```
(%i15) factor((2*n+1)^2+1);
      2
(%o15) 2 (2 n + 2 n + 1)
(%i16) factor((2*n+1)^4+1);
      4      3      2
(%o16) 2 (8 n + 16 n + 12 n + 4 n + 1)
(%i17) factor((2*n+1)^8+1);
      8      7      6      5      4      3      2
(%o17) 2 (128 n + 512 n + 896 n + 896 n + 560 n + 224 n + 56 n + 8 n
      + 1)
(%i18) factor((2*n+1)^16+1);
      16      15      14      13      12
(%o18) 2 (32768 n + 262144 n + 983040 n + 2293760 n + 3727360 n
      + 4472832 n + 4100096 n + 2928640 n + 1647360 n + 732160 n + 256256 n
      + 69888 n + 14560 n + 2240 n + 240 n + 16 n + 1)
```

このように2が因数分解される。



では  $x^2 + 1$  の場合、

```
(%i1) factor(2^2+1);
(%o1) 5
(%i2) factor(4^2+1);
(%o2) 17
(%i3) factor(6^2+1);
(%o3) 37
(%i4) factor(8^2+1);
(%o4) 5 13
(%i5) factor(10^2+1);
(%o5) 101
(%i6) factor(12^2+1);
(%o6) 5 29
(%i7) factor(14^2+1);
(%o7) 197
(%i8) factor(16^2+1);
(%o8) 257
(%i9) factor(18^2+1);
(%o9) 2
5 13
(%i10) factor(20^2+1);
(%o10) 401
(%i11) factor(22^2+1);
(%o11) 5 97
(%i12) factor(24^2+1);
(%o12) 577
(%i13) factor(26^2+1);
(%o13) 677
(%i14) factor(28^2+1);
(%o14) 5 157
(%i16) factor(30^2+1);
(%o16) 17 53
(%i17) factor(32^2+1);
(%o17) 2
5 41
(%i18) factor(34^2+1);
(%o18) 13 89
(%i19) factor(36^2+1);
(%o19) 1297
(%i20) factor(38^2+1);
(%o20) 2
5 17
(%i21) factor(40^2+1);
(%o21) 1601
(%i22) factor(42^2+1);
(%o22) 5 353
(%i23) factor(44^2+1);
(%o23) 13 149
(%i24) factor(46^2+1);
```

```
(%o24)                                     29 73
(%i25) factor(48^2+1);
(%o25)                                     5 461
(%i26) factor(50^2+1);
(%o26)                                     41 61
```

結構素数がある。

では  $x^4 + 1$  の場合

(%i27) factor(2 <sup>4</sup> +1);	
(%o27)	17
(%i28) factor(4 <sup>4</sup> +1);	
(%o28)	257
(%i29) factor(6 <sup>4</sup> +1);	
(%o29)	1297
(%i30) factor(8 <sup>4</sup> +1);	
(%o30)	17 241
(%i31) factor(10 <sup>4</sup> +1);	
(%o31)	73 137
(%i32) factor(12 <sup>4</sup> +1);	
(%o32)	89 233
(%i33) factor(14 <sup>4</sup> +1);	
(%o33)	41 937
(%i34) factor(16 <sup>4</sup> +1);	
(%o34)	65537
(%i35) factor(18 <sup>4</sup> +1);	
(%o35)	113 929
(%i36) factor(20 <sup>4</sup> +1);	
(%o36)	160001
(%i37) factor(22 <sup>4</sup> +1);	
(%o37)	73 3209
(%i38) factor(24 <sup>4</sup> +1);	
(%o38)	331777
(%i39) factor(26 <sup>4</sup> +1);	
(%o39)	17 26881
(%i40) factor(28 <sup>4</sup> +1);	
(%o40)	614657
(%i41) factor(30 <sup>4</sup> +1);	
(%o41)	241 3361
(%i42) factor(32 <sup>4</sup> +1);	
(%o42)	17 61681
(%i43) factor(34 <sup>4</sup> +1);	
(%o43)	1336337
(%i44) factor(36 <sup>4</sup> +1);	
(%o44)	17 98801
(%i45) factor(38 <sup>4</sup> +1);	
(%o45)	41 50857
(%i46) factor(40 <sup>4</sup> +1);	
(%o46)	769 3329

では  $x^8 + 1$  の場合

```
(%i47) factor(2^8+1);
(%o47) 257
(%i48) factor(4^8+1);
(%o48) 65537
(%i49) factor(6^8+1);
(%o49) 17 98801
(%i50) factor(8^8+1);
(%o50) 97 257 673
(%i51) factor(10^8+1);
(%o51) 17 5882353
(%i52) factor(12^8+1);
(%o52) 17 97 260753
(%i53) factor(14^8+1);
(%o53) 17 5393 16097
(%i54) factor(16^8+1);
(%o54) 641 6700417
(%i55) factor(18^8+1);
(%o55) 97 113607841
(%i56) factor(20^8+1);
(%o56) 17 1505882353
(%i57) factor(22^8+1);
(%o57) 17 3227992561
(%i58) factor(24^8+1);
(%o58) 17 2801 2311681
(%i59) factor(26^8+1);
(%o59) 3617 57734881
(%i60) factor(28^8+1);
(%o60) 17 22223646961
(%i61) factor(30^8+1);
(%o61) 337 401 4855073
(%i62) factor(32^8+1);
(%o62) 257 4278255361
(%i63) factor(34^8+1);
(%o63) 47441 37642417
(%i64) factor(36^8+1);
(%o64) 353 1697 4709377
(%i65) factor(38^8+1);
(%o65) 539089 8065073
(%i66) factor(40^8+1);
2
(%o66) 17 113 337 641 929
```

では  $x^{16} + 1$  の場合

```
(%i67) factor(2^16+1);
(%o67)          65537
(%i68) factor(4^16+1);
(%o68)          641 6700417
(%i69) factor(6^16+1);
(%o69)          353 1697 4709377
(%i70) factor(8^16+1);
(%o70)          193 65537 22253377
(%i71) factor(10^16+1);
(%o71)          353 449 641 1409 69857
(%i72) factor(12^16+1);
(%o72)          153953 1200913648289
(%i73) factor(14^16+1);
(%o73)          193 11284732320255809
(%i74) factor(16^16+1);
(%o74)          274177 67280421310721
(%i75) factor(18^16+1);
(%o75)          3930785153 30894471809
(%i76) factor(20^16+1);
(%o76)          97 6756288659793814433
(%i77) factor(22^16+1);
(%o77)          449 2310689 2902518892577
(%i78) factor(24^16+1);
(%o78)          193 349409 2356609 76243169
(%i79) factor(26^16+1);
(%o79)          101377 430164069753779201
(%i80) factor(28^16+1);
(%o80)          97 2012449 4338337 168542177
(%i81) factor(30^16+1);
(%o81)          97 257 249352417 69250296257
(%i82) factor(32^16+1);
(%o82)          65537 414721 44479210368001
(%i83) factor(34^16+1);
(%o83)          97 257 2583249857 49521227489
(%i84) factor(36^16+1);
(%o84)          2753 145601 19854979505843329
(%i85) factor(38^16+1);
(%o85)          1495297 71918657 175779617473
(%i86) factor(40^16+1);
(%o86)          8641 4970451679203795856961
(%i87) factor(42^16+1);
(%o87)          97 193 5007945605667365550817
(%i88) factor(44^16+1);
(%o88)          197352587024076973231046657
(%i89) factor(46^16+1);
(%o89)          97 8513 624737 779065031672321
(%i90) factor(48^16+1);
(%o90)          170497 4657394825125242693121
```

```
(%i91) factor(50^16+1);  
(%o91)          4481 33601 158722433 63849075137
```

では  $x^{32} + 1$  の場合

```
(%i92) factor(2^32+1);
(%o92)          641 6700417
(%i93) factor(4^32+1);
(%o93)          274177 67280421310721
(%i94) factor(6^32+1);
(%o94)          2753 145601 19854979505843329
(%i95) factor(8^32+1);
(%o95)          641 6700417 18446744069414584321
(%i96) factor(10^32+1);
(%o96)          19841 976193 6187457 834427406578561
(%i97) factor(12^32+1);
(%o97)          769 44450180997616192602560262634753
(%i98) factor(14^32+1);
(%o98)          7489 1204905857 1667461121 315256811699009
(%i99) factor(16^32+1);
(%o99)          59649589127497217 5704689200685129054721
(%i100) factor(18^32+1);
(%o100)         254209 475777 121934274199167596917341199489
(%i101) factor(20^32+1);
(%o101)         193 577 641 6016843417749425380073724334377601
(%i102) factor(22^32+1);
(%o102)         257 29571562823949828673 1193214125190655970497
(%i103) factor(24^32+1);
bvp: 12234999233
(%o103)         449 12234999233 1377485825682881 19400919276088001
(%i104) factor(26^32+1);
(%o104)         128134849 1359389633857 10917819745554525385765889
(%i105) factor(28^32+1);
(%o105)         7734913 13430849 2716827163186049 72183193582863809
(%i106) factor(30^32+1);
(%o106)         18530201888518410000000000000000000000000000000000001
(%i107) factor(32^32+1);
(%o107)         641 3602561 6700417 94455684953484563055991838558081
(%i108) factor(34^32+1);
(%o108)         65959705961729 154186600910808898663635581124287233
(%i109) factor(36^32+1);
(%o109)         4926056449 447183309836853377 28753787197056661026689
(%i110) factor(38^32+1);
(%o110)         180073466328198404609 1984382402808654046521812854273
```

これは、フェルマー素数の  $n$  進数への拡張ですが、これもなにか名前がついているのかな。  
これは、1がならんだ数として考えると

```
x^2+1  101
x^4+1  10001
x^8+1  100000001
x^16+1 10000000000000001
x^32+1 1000000000000000000000000000000000000000000000001
```

という具合で0の数が間違っているかも知れませんが、1,0の並んだ数であることには変わりありません。

```
x^2+x+1      111
x^4+x^2+1    10101
x^8+x^4+1    100010001
x^16+x^8+1   1000000100000001
x^32+x^16+1  100000000000010000000000000001
```

これも因数分解できません。基本形が  $x^2 + x + 1$  が因数分解できないからです。例えば  $y = x^2$  としても  $x^4 + x^2 + 1 = y^2 + y + 1$  になりますからね。

```
(%i1) factor(x^2+x+1);
(%o1)          2
              x  + x + 1
(%i2) factor(x^4+x^2+1);
(%o2)          2          2
              (x  - x + 1) (x  + x + 1)
(%i3) factor(x^8+x^4+1);
(%o3)          2          2          4          2
              (x  - x + 1) (x  + x + 1) (x  - x + 1)
(%i4) factor(x^16+x^8+1);
(%o4)          2          2          4          2          8          4
              (x  - x + 1) (x  + x + 1) (x  - x + 1) (x  - x + 1)
(%i5) factor(x^32+x^16+1);
(%o5)          2          2          4          2          8          4          16          8
              (x  - x + 1) (x  + x + 1) (x  - x + 1) (x  - x + 1) (x  - x + 1)
(%i6) factor(x^64+x^32+1);
(%o6)          2          2          4          2          8          4          16          8
              (x  - x + 1) (x  + x + 1) (x  - x + 1) (x  - x + 1) (x  - x + 1)
                                                    32          16
                                                    (x  - x  + 1)
```

そうは甘くなかった。でも、これは面白い関係だな。

```
(%i9) factor((x^2+x+1)/(x^2+x+1));
(%o9)          1
(%i10) factor((x^4+x^2+1)/(x^2+x+1));
(%o10)          2
              x  - x + 1
(%i11) factor((x^8+x^4+1)/(x^2+x+1));
(%o11)          2          4          2
              (x  - x + 1) (x  - x + 1)
(%i12) factor((x^16+x^8+1)/(x^2+x+1));
(%o12)          2          4          2          8          4
              (x  - x + 1) (x  - x + 1) (x  - x + 1)
(%i13) factor((x^32+x^16+1)/(x^2+x+1));
(%o13)          2          4          2          8          4          16          8
              (x  - x + 1) (x  - x + 1) (x  - x + 1) (x  - x + 1)
(%i14) factor((x^64+x^32+1)/(x^2+x+1));
```



```

      2      4      2      8      4      16      8      32      16
(%o14) (x  - x  + 1) (x  - x  + 1) (x  - x  + 1) (x  - x  + 1) (x  - x  + 1)
(%i15) factor((x^128+x^64+1)/(x^2+x+1));
      2      4      2      8      4      16      8      32      16
(%o15) (x  - x  + 1) (x  - x  + 1) (x  - x  + 1) (x  - x  + 1) (x  - x  + 1)
                                             64      32
                                             (x  - x  + 1)

```

たとえば、3進数の1111111は

```

(%i1) factor((3^7-1)/(3-1));
(%o1) 1093

```

で10進数では素数である。試しにこの式を解いてみると

```

(%i3) solve(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=1093,x);
(%o3) [x = 3, 0 = x^5 + 4 x^4 + 13 x^3 + 40 x^2 + 121 x + 364]

```

$x = 3$ であることがわかる。さて、では1111が10進数で1093になる進数は解かせてみると

```

(%i7) solve(x^3+x^2+x+1=1093,x);
      sqrt(3) %i 1
      2 (----- - -)
      2      2
(%o7) [x = - -----
      sqrt(3579091) 29491 1/3
      9 (----- + -----)
      2 sqrt(3) 54
      sqrt(3579091) 29491 1/3 sqrt(3) %i 1 1
+ (----- + -----) (- ----- - -) - -,
      2 sqrt(3) 54 2 2 3
      sqrt(3) %i 1
      2 (- ----- - -)
      2      2
      sqrt(3579091) 29491 1/3 sqrt(3) %i 1
x = (----- + -----) (- ----- - -) - -----
      2 sqrt(3) 54 2 2 sqrt(3579091) 29491 1/3
      9 (----- + -----)
      2 sqrt(3) 54
      1 sqrt(3579091) 29491 1/3 2 1
- -, x = (----- + -----) - ----- - ]
      3 2 sqrt(3) 54 sqrt(3579091) 29491 1/3 3
      9 (----- + -----)
      2 sqrt(3) 54

```

これを計算させて近似解を示すと

```

(%i8) float(solve(x^3+x^2+x+1=1093,x));
(%o8) [x = -.02157805222602861 (.8660254037844386 %i - 0.5)
+ 10.29853018680554 (-.8660254037844386 %i - 0.5) - .3333333333333333,
x = 10.29853018680554 (.8660254037844386 %i - 0.5)

```

- .02157805222602861 (- .8660254037844386 %i - 0.5) - .3333333333333333,  
x = 9.943618801246183]

の3つあり2つは複素数で1つがおよそ  $x = 9.943618801246183$  進数であることがわかる。

では、11111 が10進数で1093になる進数は

```
(%i20) solve(x^4+x^3+x^2+x+1=1093,x);
(%o20) [x = - (2
- 3/2
2 sqrt(20849866402) 24580
sqrt(135 sqrt(----- + -----)
3 sqrt(3) 27
2 sqrt(20849866402) 24580 2/3 2 sqrt(20849866402) 24580 1/3
- (18 (----- + -----) + 15 (----- + -----)
3 sqrt(3) 27 3 sqrt(3) 27
2 sqrt(20849866402) 24580 2/3
- 26212) sqrt(36 (----- + -----)
3 sqrt(3) 27
2 sqrt(20849866402) 24580 1/3
- 15 (----- + -----) - 52424)))
3 sqrt(3) 27
2 sqrt(20849866402) 24580 1/6 2 sqrt(20849866402) 24580 2/3 2 sqrt(20
/(3 (----- + -----) (36 (----- + -----) - 15 (-----
3 sqrt(3) 27 3 sqrt(3) 27 3 sq
2 sqrt(20849866402) 24580 2/3
- sqrt(36 (----- + -----)
3 sqrt(3) 27
2 sqrt(20849866402) 24580 1/3
- 15 (----- + -----) - 52424)
3 sqrt(3) 27
2 sqrt(20849866402) 24580 1/6 1
/(12 (----- + -----) ) - -,
3 sqrt(3) 27 4
- 3/2 2 sqrt(20849866402) 24580
x = (2 sqrt(135 sqrt(----- + -----)
3 sqrt(3) 27
2 sqrt(20849866402) 24580 2/3 2 sqrt(20849866402) 24580 1/3
- (18 (----- + -----) + 15 (----- + -----)
3 sqrt(3) 27 3 sqrt(3) 27
2 sqrt(20849866402) 24580 2/3
- 26212) sqrt(36 (----- + -----)
3 sqrt(3) 27
2 sqrt(20849866402) 24580 1/3
- 15 (----- + -----) - 52424)))
3 sqrt(3) 27
2 sqrt(20849866402) 24580 1/6 2 sqrt(20849866402) 24580 2/3 2 sqrt(20
/(3 (----- + -----) (36 (----- + -----) - 15 (-----
3 sqrt(3) 27 3 sqrt(3) 27 3 sq
2 sqrt(20849866402) 24580 2/3
- sqrt(36 (----- + -----)
3 sqrt(3) 27
2 sqrt(20849866402) 24580 1/3
```



$$\frac{2 \sqrt{20849866402}}{3 \sqrt{3}} + \frac{24580}{27} \sqrt[6]{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4}$$

これを計算させて近似解を求めると

```
(%i21) float(solve(x^4+x^3+x^2+x+1=1093,x));
(%o21) [x = - 5.976387681605035, x = 5.466932286729682,
x = - 5.77602265202173 %i - .2452723025623237,
x = 5.77602265202173 %i - .2452723025623237]
```

より、一つは負で、2つは複素数なので残りの  $x = 5.466932286729682$  進数となる。でも、小数点以下がある進数って、おかしい感じですよ。



試しに、 $x^5 + x^2 + 1$  を見てみましょう。

```
(%i94) factor(2^5+2^2+1);
(%o94) 37
(%i95) factor(3^5+3^2+1);
(%o95) 11 23
(%i96) factor(4^5+4^2+1);
(%o96) 3 347
(%i97) factor(5^5+5^2+1);
(%o97) 23 137
(%i98) factor(6^5+6^2+1);
(%o98) 13 601
(%i99) factor(7^5+7^2+1);
(%o99) 2
3 1873
(%i100) factor(8^5+8^2+1);
(%o100) 32833
(%i101) factor(9^5+9^2+1);
(%o101) 29 2039
(%i102) factor(10^5+10^2+1);
(%o102) 3 61 547
(%i103) factor(11^5+11^2+1);
(%o103) 53 3041
(%i104) factor(12^5+12^2+1);
(%o104) 307 811
(%i105) factor(13^5+13^2+1);
(%o105) 3 123821
(%i106) factor(14^5+14^2+1);
(%o106) 11 59 829
(%i107) factor(15^5+15^2+1);
(%o107) 19 39979
(%i108) factor(16^5+16^2+1);
(%o108) 2
3 116537
(%i109) factor(17^5+17^2+1);
(%o109) 467 3041
(%i110) factor(18^5+18^2+1);
(%o110) 43 43951
(%i111) factor(19^5+19^2+1);
(%o111) 3 13 63499
(%i112) factor(20^5+20^2+1);
(%o112) 3200401
(%i113) factor(21^5+21^2+1);
(%o113) 41 99623
(%i114) factor(22^5+22^2+1);
(%o114) 3 1718039
(%i115) factor(23^5+23^2+1);
(%o115) 787 8179
(%i116) factor(24^5+24^2+1);
(%o116) 2693 2957
```

```
(%i117) factor(25^5+25^2+1);
(%o117)          4
                3  11 97 113
(%i118) factor(26^5+26^2+1);
(%o118)          23 516611
(%i119) factor(27^5+27^2+1);
(%o119)          14349637
```

27までやってみましたが、2,8,20,27が素数になりました。さて、 $x = 3n + 1$  の数の場合 3 を約数に持っています。そこで、

```
(%i1) factor((3*n+1)^5+(3*n+1)^2+1);
(%o1)          3 (81 n^5 + 135 n^4 + 90 n^3 + 33 n^2 + 7 n + 1)
```

すると、3 を因数に持っていますね。同様に 11 も周期的に現れていますね。

```
(%i2) factor((11*n+3)^5+(11*n+3)^2+1);
(%o2)          11 (14641 n^5 + 19965 n^4 + 10890 n^3 + 2981 n^2 + 411 n + 23)
(
```

となり 11 を因数に持っています。

$x^{2n+1} + x^n + 1$  型の式は因数分解されないのはなぜなのかな？

5.1.3  $x^{2n-1} + x^n + 1$ 

$x^{2n-1} + x^n + 1$  型の式はどうか?

(%i2) factor(x <sup>3</sup> +x <sup>2</sup> +1);	$x^3 + x^2 + 1$
(%o2)	
(%i3) factor(x <sup>5</sup> +x <sup>3</sup> +1);	$x^5 + x^3 + 1$
(%o3)	
(%i4) factor(x <sup>7</sup> +x <sup>4</sup> +1);	$x^7 + x^4 + 1$
(%o4)	
(%i5) factor(x <sup>9</sup> +x <sup>5</sup> +1);	$x^9 + x^5 + 1$
(%o5)	
(%i6) factor(x <sup>11</sup> +x <sup>6</sup> +1);	$x^{11} + x^6 + 1$
(%o6)	
(%i7) factor(x <sup>13</sup> +x <sup>7</sup> +1);	$x^{13} + x^7 + 1$
(%o7)	
(%i8) factor(x <sup>15</sup> +x <sup>8</sup> +1);	$x^{15} + x^8 + 1$
(%o8)	
(%i9) factor(x <sup>17</sup> +x <sup>9</sup> +1);	$x^{17} + x^9 + 1$
(%o9)	
(%i10) factor(x <sup>19</sup> +x <sup>10</sup> +1);	$x^{19} + x^{10} + 1$
(%o10)	
(%i11) factor(x <sup>21</sup> +x <sup>11</sup> +1);	$x^{21} + x^{11} + 1$
(%o11)	
(%i12) factor(x <sup>23</sup> +x <sup>12</sup> +1);	$x^{23} + x^{12} + 1$
(%o12)	
(%i13) factor(x <sup>25</sup> +x <sup>13</sup> +1);	$x^{25} + x^{13} + 1$
(%o13)	
(%i14) factor(x <sup>27</sup> +x <sup>14</sup> +1);	$x^{27} + x^{14} + 1$
(%o14)	
(%i15) factor(x <sup>29</sup> +x <sup>15</sup> +1);	$x^{29} + x^{15} + 1$
(%o15)	
(%i16) factor(x <sup>31</sup> +x <sup>16</sup> +1);	$x^{31} + x^{16} + 1$
(%o16)	
(%i17) factor(x <sup>33</sup> +x <sup>17</sup> +1);	$x^{33} + x^{17} + 1$



```
(%o17)          33    17
x  + x  + 1
(%i18) factor(x^35+x^18+1);

(%o18)          35    18
x  + x  + 1
(%i19) factor(x^37+x^19+1);

(%o19)          37    19
x  + x  + 1
(%i20) factor(x^39+x^20+1);

(%o20)          39    20
x  + x  + 1
```

やはり、因数分解されない。

5.1.4  $x^{2n} + x^n + 1$ 

$x^{2n} + x^n + 1$  型の式はどうか?

```
(%i21) factor(x^4+x^2+1);
(%o21) (x^2 - x + 1) (x^2 + x + 1)
(%i22) factor(x^6+x^3+1);
(%o22) x^6 + x^3 + 1
(%i23) factor(x^8+x^4+1);
(%o23) (x^2 - x + 1) (x^2 + x + 1) (x^4 - x^2 + 1)
(%i24) factor(x^10+x^5+1);
(%o24) (x^2 + x + 1) (x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1)
(%i25) factor(x^12+x^6+1);
(%o25) (x^6 - x^3 + 1) (x^6 + x^3 + 1)
(%i26) factor(x^14+x^7+1);
(%o26) (x^2 + x + 1) (x^12 - x^11 + x^9 - x^8 + x^6 - x^4 + x^3 - x + 1)
(%i27) factor(x^16+x^8+1);
(%o27) (x^2 - x + 1) (x^2 + x + 1) (x^4 - x^2 + 1) (x^8 - x^4 + 1)
(%i28) factor(x^18+x^9+1);
(%o28) x^18 + x^9 + 1
(%i29) factor(x^20+x^10+1);
(%o29) (x^2 - x + 1) (x^2 + x + 1) (x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1)
(%i30) factor(x^22+x^11+1);
(%o30) (x^2 + x + 1) (x^20 - x^19 + x^17 - x^16 + x^14 - x^13 + x^11 - x^10 + x^9 - x^7 + x^6 - x^4 + x^3 - x + 1)
(%i31) factor(x^24+x^12+1);
(%o31) (x^6 - x^3 + 1) (x^6 + x^3 + 1) (x^12 - x^6 + 1)
(%i33) factor(x^26+x^13+1);
(%o33) (x^2 + x + 1) (x^24 - x^23 + x^21 - x^20 + x^18 - x^17 + x^15 - x^14 + x^12 - x^10 + x^9 - x^7 + x^6 - x^4 + x^3 - x + 1)
(%i34) factor(x^28+x^14+1);
(%o34) (x^2 - x + 1) (x^2 + x + 1) (x^12 - x^11 + x^9 - x^8 + x^6 - x^4 + x^3 - x + 1)
(x^12 + x^11 - x^9 + x^8 - x^6 + x^4 - x^3 + x - 1)
```

```
(%i35) factor(x^30+x^15+1);
(%o35)          (x6 + x3 + 1) (x24 - x21 + x15 - x12 + x9 - x3 + 1)
```

2つの式を除いて因数分解される。

5.1.5  $x^{2n+2} + x^n + 1$ 

$x^{2n+2} + x^n + 1$  型の式はどうか?

(%i1) factor(x <sup>6</sup> +x <sup>2</sup> +1);	$x^6 + x^2 + 1$
(%o1)	
(%i2) factor(x <sup>8</sup> +x <sup>3</sup> +1);	$x^8 + x^3 + 1$
(%o2)	
(%i3) factor(x <sup>10</sup> +x <sup>4</sup> +1);	$x^{10} + x^4 + 1$
(%o3)	
(%i4) factor(x <sup>12</sup> +x <sup>5</sup> +1);	$x^{12} + x^5 + 1$
(%o4)	
(%i5) factor(x <sup>14</sup> +x <sup>6</sup> +1);	$x^{14} + x^6 + 1$
(%o5)	
(%i6) factor(x <sup>16</sup> +x <sup>7</sup> +1);	$x^{16} + x^7 + 1$
(%o6)	
(%i7) factor(x <sup>18</sup> +x <sup>8</sup> +1);	$x^{18} + x^8 + 1$
(%o7)	
(%i8) factor(x <sup>20</sup> +x <sup>9</sup> +1);	$x^{20} + x^9 + 1$
(%o8)	
(%i9) factor(x <sup>22</sup> +x <sup>10</sup> +1);	$x^{22} + x^{10} + 1$
(%o9)	
(%i14) factor(x <sup>24</sup> +x <sup>11</sup> +1);	$x^{24} + x^{11} + 1$
(%o14)	
(%i15) factor(x <sup>26</sup> +x <sup>12</sup> +1);	$x^{26} + x^{12} + 1$
(%o15)	
(%i16) factor(x <sup>28</sup> +x <sup>13</sup> +1);	$x^{28} + x^{13} + 1$
(%o16)	
(%i17) factor(x <sup>30</sup> +x <sup>14</sup> +1);	$x^{30} + x^{14} + 1$
(%o17)	
(%i18) factor(x <sup>32</sup> +x <sup>15</sup> +1);	$x^{32} + x^{15} + 1$
(%o18)	
(%i19) factor(x <sup>34</sup> +x <sup>16</sup> +1);	$x^{34} + x^{16} + 1$
(%o19)	
(%i20) factor(x <sup>36</sup> +x <sup>17</sup> +1);	$x^{36} + x^{17} + 1$

```

(%o20)
(%i21) factor(x^38+x^18+1);
          36      17
         x  + x  + 1
(%o21)
(%i22) factor(x^40+x^19+1);
          38      18
         x  + x  + 1
(%o22)
(%i23) factor(x^42+x^20+1);
          40      19
         x  + x  + 1
(%o23)
(%i25) factor(x^44+x^21+1);
          42      20
         x  + x  + 1
(%o25)
          44      21
         x  + x  + 1

```

因数分解されないなあ。  $x^{2n+2} + x^n + 1 = x^{2(n+1)} + x^n + 1$

5.1.6  $x^{2n+3} + x^{2n+1} + x + 1$ 

$x^{2n+3} + x^{2n+1} + x + 1$  の形をした式も因数分解できません。

```
(%i19) factor(x^5+x^3+x+1);
(%o19)          5      3
              x  + x  + x + 1
(%i21) factor(x^7+x^5+x+1);
(%o21)          7      5
              x  + x  + x + 1
(%i22) factor(x^9+x^7+x+1);
(%o22)          9      7
              x  + x  + x + 1
(%i23) factor(x^11+x^9+x+1);
(%o23)         11      9
              x  + x  + x + 1
(%i24) factor(x^13+x^11+x+1);
(%o24)         13      11
              x  + x  + x + 1
(%i25) factor(x^15+x^13+x+1);
(%o25)         15      13
              x  + x  + x + 1
(%i26) factor(x^17+x^15+x+1);
(%o26)         17      15
              x  + x  + x + 1
(%i27) factor(x^19+x^17+x+1);
(%o27)         19      17
              x  + x  + x + 1
(%i28) factor(x^21+x^19+x+1);
(%o28)         21      19
              x  + x  + x + 1
(%i29) factor(x^23+x^21+x+1);
(%o29)         23      21
              x  + x  + x + 1
(%i30) factor(x^25+x^23+x+1);
(%o30)         25      23
              x  + x  + x + 1
(%i31) factor(x^27+x^25+x+1);
(%o31)         27      25
              x  + x  + x + 1
(%i32) factor(x^29+x^27+x+1);
(%o32)         29      27
              x  + x  + x + 1
(%i33) factor(x^31+x^29+x+1);
(%o33)         31      29
              x  + x  + x + 1
```

5.1.7 素数探索  $x^8 + x^3 + 1$ 

では数値をいれて素数を探してみます。

```
> (%i2) factor(x^8+x^3+1);
```

で見ってみました。

```
(%i1) factor(2^8+2^3+1);
(%o1) 5 53
(%i2) factor(3^8+3^3+1);
(%o2) 11 599
(%i3) factor(4^8+4^3+1);
(%o3) 2
3 37 197
(%i4) factor(5^8+5^3+1);
(%o4) 390751
(%i5) factor(6^8+6^3+1);
(%o5) 1679833
(%i6) factor(7^8+7^3+1);
(%o6) 3 5 384343
(%i7) factor(8^8+8^3+1);
(%o7) 16777729
(%i8) factor(9^8+9^3+1);
(%o8) 17 631 4013
(%i9) factor(10^8+10^3+1);
(%o9) 3 33333667
(%i10) factor(11^8+11^3+1);
(%o10) 2
199 5413
(%i11) factor(12^8+12^3+1);
(%o11) 2
5 17199337
(%i12) factor(13^8+13^3+1);
(%o12) 2
3 43 2107837
(%i13) factor(14^8+14^3+1);
(%o13) 11 134162891
(%i14) factor(15^8+15^3+1);
(%o14) 73 109 322093
(%i15) factor(16^8+16^3+1);
(%o15) 3 11903 120277
(%i16) factor(17^8+17^3+1);
(%o16) 5 1487 938233
(%i17) factor(18^8+18^3+1);
(%o17) 11019966409
(%i18) factor(19^8+19^3+1);
(%o18) 3 12511 452497
(%i19) factor(20^8+20^3+1);
(%o19) 103 248543767
(%i20) factor(21^8+21^3+1);
```

```
(%o20) 37822868623
(%i21) factor(22^8+22^3+1);
(%o21) 3
3 5 37 10986163
(%i22) factor(23^8+23^3+1);
(%o22) 34211 2289059
(%i23) factor(24^8+24^3+1);
(%o23) 110075328001
```

2から24までで5、6、8、18、21、24が素数でした。



5.1.8 素数探索  $x^7 + x^5 + x + 1$ 

```
>
> (%o21)          7   5
                x  + x  + x + 1
```

の形をした式を調べました。なお  $x$  が奇数だと結果が偶数になるので  $x$  が偶数のみです。

```
(%i34) factor(2^7+2^5+2+1);
(%o34)          163
(%i36) factor(4^7+4^5+4+1);
(%o36)          11 1583
(%i37) factor(6^7+6^5+6+1);
(%o37)          149 1931
(%i38) factor(8^7+8^5+8+1);
(%o38)          71 131 229
(%i39) factor(10^7+10^5+10+1);
(%o39)          10100011
(%i40) factor(12^7+12^5+12+1);
(%o40)          7 5154379
(%i41) factor(14^7+14^5+14+1);
(%o41)          105951343
(%i42) factor(16^7+16^5+16+1);
(%o42)          19 14183371
(%i43) factor(18^7+18^5+18+1);
(%o43)          97 311 20357
(%i44) factor(20^7+20^5+20+1);
(%o44)          3191 402131
(%i45) factor(22^7+22^5+22+1);
(%o45)          2499511543
(%i46) factor(24^7+24^5+24+1);
(%o46)          4594434073
(%i47) factor(26^7+26^5+26+1);
(%o47)          2
                7 11 103 144887
(%i48) factor(28^7+28^5+28+1);
(%o48)          13510138909
(%i49) factor(30^7+30^5+30+1);
(%o49)          167 131103593
(%i50) factor(32^7+32^5+32+1);
(%o50)          19 349 1223 4241
(%i51) factor(34^7+34^5+34+1);
(%o51)          151 348137653
(%i52) factor(36^7+36^5+36+1);
(%o52)          137 1847 309931
(%i53) factor(38^7+38^5+38+1);
(%o53)          439 260808241
(%i54) factor(40^7+40^5+40+1);
(%o54)          7 107 218881709
(%i55) factor(42^7+42^5+42+1);
(%o55)          2
                23 31 2551 4091
```

```
(%i56) factor(44^7+44^5+44+1);
(%o56)          23 71 251 779351
(%i57) factor(46^7+46^5+46+1);
(%o57)          436023620239
(%i58) factor(48^7+48^5+48+1);
(%o58)          11 53393013299
(%i59) factor(50^7+50^5+50+1);
(%o59)          199 1181 1439 2311
```

5.1.9 素数探索  $x^9 + x^7 + x + 1$ 

```
>
> (%o22)          9   7
                x  + x  + x + 1
```

では、どうでしょうか。

```
(%i60) factor(2^9+2^7+2+1);
(%o60)          643
(%i62) factor(4^9+4^7+4+1);
(%o62)          71 3923
(%i64) factor(6^9+6^7+6+1);
(%o64)          2543 4073
(%i65) factor(8^9+8^7+8+1);
(%o65)          136314889
(%i66) factor(10^9+10^7+10+1);
(%o66)          101000011
(%i67) factor(12^9+12^7+12+1);
(%o67)          5195612173
(%i68) factor(14^9+14^7+14+1);
(%o68)          38903 533801
(%i69) factor(16^9+16^7+16+1);
(%o69)          89 1051 737531
(%i70) factor(18^9+18^7+18+1);
(%o70)          11 163 3359 33037
(%i71) factor(20^9+20^7+20+1);
(%o71)          37 73 190033321
(%i72) factor(22^9+22^7+22+1);
(%o72)          139 1303 6679459
(%i73) factor(24^9+24^7+24+1);
(%o73)          2646394011673
(%i74) factor(26^9+26^7+26+1);
(%o74)          73 137 543699179
(%i75) factor(28^9+28^7+28+1);
(%o75)          71 149182378619
(%i76) factor(30^9+30^7+30+1);
(%o76)          19704870000031
(%i77) factor(32^9+32^7+32+1);
(%o77)          331301 106304333
(%i78) factor(34^9+34^7+34+1);
(%o78)          389173 156150391
(%i79) factor(36^9+36^7+36+1);
(%o79)          29 20357 172165333
(%i80) factor(38^9+38^7+38+1);
(%o80)          73 2264801600623
(%i81) factor(40^9+40^7+40+1);
(%o81)          11 3911 42061 144961
(%i82) factor(42^9+42^7+42+1);
(%o82)          1669543 243720541
(%i83) factor(44^9+44^7+44+1);
(%o83)          13799 44817821387
```

```
(%i84) factor(46^9+46^7+46+1);
(%o84) 149 92959 66611309
(%i85) factor(48^9+48^7+48+1);
(%o85) 1237 61283 17850479
(%i86) factor(50^9+50^7+50+1);
(%o86) 10093 219451 882157
(%i87) factor(52^9+52^7+52+1);
(%o87) 487 3929 23291 62401
(%i88) factor(54^9+54^7+54+1);
(%o88) 7829 498868928027
(%i89) factor(56^9+56^7+56+1);
(%o89) 691 67939 115407361
```

5.1.10  $x^{2n+5} + x^{2n+3} + x^{2n+1} + 1$ 

$x^{2n+5} + x^{2n+3} + x^{2n+1} + 1$  の形式の式が因数分解できるか見てみました。

```
(%i2) factor(x^5+x^3+x+1);
(%o2)          5      3
              x  + x  + x + 1
(%i3) factor(x^7+x^5+x^3+1);
(%o3)          7      5      3
              x  + x  + x  + 1
(%i4) factor(x^9+x^7+x^5+1);
(%o4)          9      7      5
              x  + x  + x  + 1
(%i5) factor(x^11+x^9+x^7+1);
(%o5)         11      9      7
              x  + x  + x  + 1
(%i6) factor(x^13+x^11+x^9+1);
(%o6)         13      11      9
              x  + x  + x  + 1
(%i7) factor(x^15+x^13+x^11+1);
(%o7)         15      13      11
              x  + x  + x  + 1
(%i8) factor(x^17+x^15+x^13+1);
(%o8)         17      15      13
              x  + x  + x  + 1
(%i9) factor(x^19+x^17+x^15+1);
(%o9)         19      17      15
              x  + x  + x  + 1
(%i10) factor(x^21+x^19+x^17+1);
(%o10)        21      19      17
              x  + x  + x  + 1
(%i11) factor(x^23+x^21+x^19+1);
(%o11)        23      21      19
              x  + x  + x  + 1
(%i12) factor(x^25+x^23+x^21+1);
(%o12)        25      23      21
              x  + x  + x  + 1
(%i13) factor(x^27+x^25+x^23+1);
(%o13)        27      25      23
              x  + x  + x  + 1
(%i14) factor(x^29+x^27+x^25+1);
(%o14)        29      27      25
              x  + x  + x  + 1
(%i15) factor(x^31+x^29+x^27+1);
(%o15)        31      29      27
              x  + x  + x  + 1
(%i16) factor(x^33+x^31+x^29+1);
(%o16)        33      31      29
              x  + x  + x  + 1
```

5.1.11 素数探求  $x^7 + x^5 + x^3 + 1$ 

```
>
> (%o3)          7    5    3
                x  + x  + x  + 1
```

を見てみました。

```
(%i17) factor(2^7+2^5+2^3+1);
                2
(%o17)          13
(%i19) factor(4^7+4^5+4^3+1);
                101 173
(%i20) factor(6^7+6^5+6^3+1);
                17 16937
(%i21) factor(8^7+8^5+8^3+1);
                431 4943
(%i22) factor(10^7+10^5+10^3+1);
                43 234907
(%i23) factor(12^7+12^5+12^3+1);
                113 319313
(%i24) factor(14^7+14^5+14^3+1);
                105954073
(%i25) factor(16^7+16^5+16^3+1);
                12973 20773
(%i26) factor(18^7+18^5+18^3+1);
                23 269 99259
(%i27) factor(20^7+20^5+20^3+1);
                14699 87299
(%i28) factor(22^7+22^5+22^3+1);
                179 2713 5147
(%i29) factor(24^7+24^5+24^3+1);
                29 613 258449
(%i30) factor(26^7+26^5+26^3+1);
                43 139 1345777
(%i31) factor(28^7+28^5+28^3+1);
                13 1039243141
(%i32) factor(30^7+30^5+30^3+1);
                1283 17064947
(%i33) factor(32^7+32^5+32^3+1);
                113 304365713
(%i34) factor(34^7+34^5+34^3+1);
                43 109 1237 9067
(%i35) factor(36^7+36^5+36^3+1);
                439 1543 115777
(%i36) factor(38^7+38^5+38^3+1);
                114494872633
(%i37) factor(40^7+40^5+40^3+1);
                17 739 13049627
(%i38) factor(42^7+42^5+42^3+1);
                230670098569
(%i39) factor(44^7+44^5+44^3+1);
```

```
(%o39) 79 4043579887
(%i40) factor(46^7+46^5+46^3+1);
(%o40) 229 1904033701
(%i41) factor(48^7+48^5+48^3+1);
(%o41) 587323256833
(%i42) factor(50^7+50^5+50^3+1);
(%o42) 659 1185982739
(%i43) factor(52^7+52^5+52^3+1);
(%o43) 571 1801141939
```

2 から 52 迄で素数は 14、38,48 だけでした。

どうして、奇数乗の場合因数分解できないか、あるいは偶然なのかは分かりません。

5.1.12  $x^{2n+4} + x^{2n+3} + x^{2n+2} + x^{2n+1} + 1$ 

ところで、

```
(%i3) factor(x^4+x^3+x^2+x+1);
(%o3)          4      3      2
              x  + x  + x  + x + 1
```

であり、因数分解されない。

```
(%i1) factor(x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+1);
(%o1)          6      4      2
              (x + 1) (x  + x  + x  - x + 1)
(%i2) factor(x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+1);
(%o2)          8      6      4      3      2
              (x + 1) (x  + x  + x  - x  + x  - x + 1)
(%i4) factor(x^11+x^10+x^9+x^8+x^7+1);
(%o4)          2          2          6
              (x + 1) (x  - x + 1) (x  + x + 1) (x  - x + 1)
```

ここで  $(x+1)$  の後ろは展開すると

```
(%i10) expand((x^2-x+1)*(x^2+x+1)*(x^6-x+1));
(%o10)          10      8      6      5      4      3      2
              x  + x  + x  - x  + x  - x  + x  - x + 1
となる。
(%i5) factor(x^13+x^12+x^11+x^10+x^9+1);
(%o5)          12      10      8      7      6      5      4      3      2
              (x + 1) (x  + x  + x  - x  + x  - x  + x  - x  + x  - x + 1)
(%i6) factor(x^15+x^14+x^13+x^12+x^11+1);
(%o6)          14      12      10      9      8      7      6      5      4      3      2
              (x + 1) (x  + x  + x  - x  + x  - x  + x  - x  + x  - x  + x  - x + 1)

x^(2n+5)+x^(2n+3)+x^(2n+1)+1
=x^(2n+1){x^4+x^2+1}+1
```

でどうなるの?

```
^^e2^^91^^a0
x^4+x^2+1=k と置くと
  x^(2n+5)+x^(2n+3)+x^(2n+1)+1
=kx^(2n+1)+1

^^e2^^91^^a1
  x^(2n+3)+x^(2n+1)+1
=x^(2n+1){x^2+1}+1   j=x^2+1 とおくと
=jx^(2n+1)+1
```

この2つはおなじものか。

すると、



$$\begin{aligned} & x^{2n+5} + x^{2n+4} + x^{2n+3} + x^{2n+2} + x^{2n+1} + 1 \\ &= x^{2n+1} \{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\} + 1 \\ &= mx^{2n+1} + 1 \end{aligned}$$

となり、同じとなるが....

mなんて、分割できないし.....

$$5.1.13 \quad x^{2n+5} + x^{2n+3} + x^{2n+1} + 1$$

偶数項を消して

$$\begin{aligned} & x^{2n+5} + x^{2n+3} + x^{2n+1} + 1 \\ &= x^{2n+1} \{x^4 + x^2 + 1\} + 1 \\ &= mx^{2n+1} + 1 \end{aligned}$$

とすると

```
(%i11) factor(x^7+x^5+x^3+1);
(%o11)          7      5      3
              x  + x  + x  + 1
(%i12) factor(x^9+x^7+x^5+1);
(%o12)          9      7      5
              x  + x  + x  + 1
(%i13) factor(x^11+x^9+x^7+1);
(%o13)          11     9      7
              x  + x  + x  + 1
(%i14) factor(x^13+x^11+x^9+1);
(%o14)          13     11     9
              x  + x  + x  + 1
(%i15) factor(x^15+x^13+x^11+1);
(%o15)          15     13     11
              x  + x  + x  + 1
(%i16) factor(x^17+x^15+x^13+1);
(%o16)          17     15     13
              x  + x  + x  + 1
(%i17) factor(x^19+x^17+x^15+1);
(%o17)          19     17     15
              x  + x  + x  + 1
```

となる。

5.1.14  $x^{2n+7} + x^{2n+5} + x^{2n+3} + x^{2n+1} + 1$ 

```
(%i1) factor(x^9+x^7+x^5+x^3+x+1);
          9  7  5  3
(%o1)      x + x + x + x + x + 1
(%i2) factor(x^11+x^9+x^7+x^5+x^3+1);
          11  9  7  5  3
(%o2)      x  + x  + x  + x  + x  + 1
(%i3) factor(x^13+x^11+x^9+x^7+x^5+1);
          2      11  10  9  5  4  3
(%o3)      (x  + x + 1) (x  - x  + x  + x  - x  + x  - x + 1)
(%i4) factor(x^15+x^13+x^11+x^9+x^7+1);
          15  13  11  9  7
(%o4)      x  + x  + x  + x  + x  + 1
(%i5) factor(x^17+x^15+x^13+x^11+x^9+1);
          17  15  13  11  9
(%o5)      x  + x  + x  + x  + x  + 1
(%i6) factor(x^19+x^17+x^15+x^13+x^11+1);
          2      17  16  15  11  10  9  7  6  4  3
(%o6)      (x  + x + 1) (x  - x  + x  + x  - x  + x  - x  + x  - x  + x  - x
          + 1)
(%i7) factor(x^21+x^19+x^17+x^15+x^13+1);
          21  19  17  15  13
(%o7)      x  + x  + x  + x  + x  + 1
(%i8) factor(x^23+x^21+x^19+x^17+x^15+1);
          23  21  19  17  15
(%o8)      x  + x  + x  + x  + x  + 1
(%i9) factor(x^25+x^23+x^21+x^19+x^17+1);
          2      23  22  21  17  16  15  13  12  10  9
(%o9)      (x  + x + 1) (x  - x  + x  + x  - x  + x  - x  + x  - x  + x
          7  6  4  3
          - x  + x  - x  + x  - x + 1)
```

そうは、甘くなかった。

## 5.1.15 素数乗

では、素数乗ならどうなんだろう。

```
(%i17) factor(x+1);
(%o17) x + 1
(%i16) factor(x^2+x+1);
(%o16) x^2 + x + 1
(%i12) factor(x^3+x^2+x+1);
(%o12) (x + 1) (x^2 + x + 1)
(%i14) factor(x^5+x^3+x^2+x+1);
(%o14) x^5 + x^3 + x^2 + x + 1
(%i15) factor(x^7+x^5+x^3+x^2+x+1);
(%o15) (x^2 + 1) (x^2 + x + 1) (x^3 - x^2 + 1)
(%i2) factor(x^11+x^7+x^5+x^3+x^2+x+1);
(%o2) x^11 + x^7 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1
(%i3) factor(x^13+x^11+x^7+x^5+x^3+x^2+x+1);
(%o3) (x^2 + 1) (x^11 + x^5 + x + 1)
(%i4) factor(x^17+x^13+x^11+x^7+x^5+x^3+x^2+x+1);
(%o4) x^17 + x^13 + x^11 + x^7 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1
(%i5) factor(x^19+x^17+x^13+x^11+x^7+x^5+x^3+x^2+x+1);
(%o5) (x^2 + 1) (x^17 + x^11 + x^5 + x + 1)
(%i6) factor(x^23+x^19+x^17+x^13+x^11+x^7+x^5+x^3+x^2+x+1);
(%o6) x^23 + x^19 + x^17 + x^13 + x^11 + x^7 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1
(%i7) factor(x^29+x^23+x^19+x^17+x^13+x^11+x^7+x^5+x^3+x^2+x+1);
(%o7) (x + 1) (x^27 - x^25 + x^23 - x^17 + x^11 + x^5 + x + 1)
(%i8) factor(x^31+x^29+x^23+x^19+x^17+x^13+x^11+x^7+x^5+x^3+x^2+x+1);
(%o8) x^31 + x^29 + x^23 + x^19 + x^17 + x^13 + x^11 + x^7 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1
(%i9) factor(x^37+x^31+x^29+x^23+x^19+x^17+x^13+x^11+x^7+x^5+x^3+x^2+x+1);
(%o9) (x + 1) (x^35 - x^33 + x^31 - x^27 + x^25 - x^23 + x^17 + x^11 + x^5 + x + 1)
(%i10) factor(x^41+x^37+x^31+x^29+x^23+x^19+x^17+x^13+x^11+x^7+x^5+x^3+x^2+x+1);
(%o10) x^41 + x^37 + x^31 + x^29 + x^23 + x^19 + x^17 + x^13 + x^11 + x^7 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1
(%i11) factor(x^43+x^41+x^37+x^31+x^29+x^23+x^19+x^17+x^13+x^11+x^7+x^5+x^3+x^2+x+1);
(%o11) (x + 1) (x^41 + x^35 - x^33 + x^31 - x^27 + x^25 - x^23 + x^17 + x^11 + x^5 + x + 1)
```

5.1.16  $x$  次の次の次の素数 +  $x$  次の次の素数 +  $x$  次の素数 +  $x$  素数 + 1

では、これは

```
(%i19) factor(x^5+x^3+x^2+x+1);
          5      3      2
(%o19)      x  + x  + x  + x + 1
(%i20) factor(x^7+x^5+x^3+x^2+1);
          7      5      3      2
(%o20)      x  + x  + x  + x  + 1
(%i21) factor(x^11+x^7+x^5+x^3+1);
          11     7      5      3
(%o21)      x   + x   + x   + x  + 1
(%i22) factor(x^13+x^11+x^7+x^5+1);
          13     11     7      5
(%o22)      x   + x   + x   + x  + 1
(%i23) factor(x^17+x^13+x^11+x^7+1);
          17     13     11     7
(%o23)      x   + x   + x   + x  + 1
(%i24) factor(x^19+x^17+x^13+x^11+1);
          4      3      2          15  14  13  12  10  6  5
(%o24) (x  + x  + x  + x + 1) (x  - x  + x  - x  + x  - x  + x  - x + 1)
(%i25) factor(x^23+x^19+x^17+x^13+1);
          23     19     17     13
(%o25)      x   + x   + x   + x  + 1
(%i26) factor(x^29+x^23+x^19+x^17+1);
          29     23     19     17
(%o26)      x   + x   + x   + x  + 1
(%i27) factor(x^31+x^29+x^23+x^19+1);
          31     29     23     19
(%o27)      x   + x   + x   + x  + 1
(%i28) factor(x^37+x^31+x^29+x^23+1);
          4      3      2          33  32  28  26  25  24  23  21
(%o28) (x  + x  + x  + x + 1) (x  - x  + x  - x  + x  - x  + x  - x  - x
          20  16  15  11  10  6  5
          + x  - x  + x  - x  + x  - x  + x  - x + 1)
(%i29) factor(x^41+x^37+x^31+x^29+1);
          41     37     31     29
(%o29)      x   + x   + x   + x  + 1
```

5.1.17  $x^{\text{素数}} + x^{\text{素数}} + 1$ 

では、これは

```
(%i1) factor(x^2+x+1);
(%o1) x^2 + x + 1
(%i2) factor(x^3+x^2+1);
(%o2) x^3 + x^2 + 1
(%i3) factor(x^5+x^3+1);
(%o3) x^5 + x^3 + 1
(%i4) factor(x^7+x^5+1);
(%o4) (x^2 + x + 1) (x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + 1)
(%i5) factor(x^11+x^7+1);
(%o5) (x^2 + x + 1) (x^9 - x^8 + x^6 - x^4 + x^3 - x^2 + 1)
(%i6) factor(x^13+x^11+1);
(%o6) (x^2 + x + 1) (x^11 - x^10 + x^9 - x^7 + x^6 - x^4 + x^3 - x^2 + 1)
(%i7) factor(x^17+x^13+1);
(%o7) (x^2 + x + 1) (x^15 - x^14 + x^12 - x^10 + x^9 - x^7 + x^6 - x^4 + x^3 - x^2 + 1)
(%i8) factor(x^19+x^17+1);
(%o8) (x^2 + x + 1) (x^17 - x^16 + x^15 - x^13 + x^12 - x^10 + x^9 - x^7 + x^6 - x^4 + x^3 - x^2 + 1)
(%i9) factor(x^23+x^19+1);
(%o9) (x^2 + x + 1) (x^21 - x^20 + x^18 - x^16 + x^15 - x^13 + x^12 - x^10 + x^9 - x^7 + x^6 - x^4 + x^3 - x^2 + 1)
(%i10) factor(x^29+x^23+1);
(%o10) x^29 + x^23 + 1
(%i11) factor(x^31+x^29+1);
(%o11) (x^2 + x + 1) (x^29 - x^28 + x^27 - x^25 + x^24 - x^22 + x^21 - x^19 + x^18 - x^16 + x^15 - x^13 + x^12 - x^10 + x^9 - x^7 + x^6 - x^4 + x^3 - x^2 + 1)
(%i12) factor(x^37+x^21+1);
(%o12) x^37 + x^21 + 1
(%i13) factor(x^37+x^31+1);
(%o13) x^37 + x^31 + 1
(%i14) factor(x^41+x^37+1);
(%o14) (x^2 + x + 1) (x^39 - x^38 + x^36 - x^34 + x^33 - x^31 + x^30 - x^28 + x^27 - x^25 + 1)
```

```
(%o14) (x24 + x22 + 1) (x19 - x18 + x16 - x15 + x13 - x12 + x10 - x9 + x7 - x6
+ x4 - x3
- x2 + x - x + 1)
(%i15) factor(x43+x41+1);
(%o15) (x2 + x + 1) (x41 - x40 + x39 - x37 + x36 - x34 + x33 - x31 + x30 - x28
+ x27 - x25 + x24 - x22 + x21 - x19 + x18 - x16 + x15 - x13 + x12 - x10 + x9
+ x7 - x6 + x4 - x3
- x2 + x - x + 1)
```

うまくいかない。

5.1.18 素数探求  $x^5 + x^3 + x^2 + x + 1$ 

```
>
> (%o19)          5    3    2
                x  + x  + x  + x + 1
```

では、どうなんだろう。

```
(%i1) factor(2^5+2^3+2^2+2+1);
(%o1)          47
(%i2) factor(3^5+3^3+3^2+3+1);
(%o2)          283
(%i3) factor(4^5+4^3+4^2+4+1);
(%o3)          1109
(%i4) factor(5^5+5^3+5^2+5+1);
(%o4)          17 193
(%i5) factor(6^5+6^3+6^2+6+1);
(%o5)          5 1607
(%i6) factor(7^5+7^3+7^2+7+1);
(%o6)          17207
(%i7) factor(8^5+8^3+8^2+8+1);
(%o7)          33353
(%i8) factor(9^5+9^3+9^2+9+1);
(%o8)          19 23 137
(%i9) factor(10^5+10^3+10^2+10+1);
(%o9)          101111
(%i10) factor(11^5+11^3+11^2+11+1);
(%o10)          5 32503
(%i11) factor(12^5+12^3+12^2+12+1);
(%o11)          409 613
(%i12) factor(13^5+13^3+13^2+13+1);
(%o12)          19 71 277
(%i13) factor(14^5+14^3+14^2+14+1);
(%o13)          540779
(%i14) factor(15^5+15^3+15^2+15+1);
(%o14)          509 1499
(%i15) factor(16^5+16^3+16^2+16+1);
(%o15)          5 251 839
(%i16) factor(17^5+17^3+17^2+17+1);
(%o16)          1425077
(%i17) factor(18^5+18^3+18^2+18+1);
(%o17)          31 61153
(%i18) factor(19^5+19^3+19^2+19+1);
(%o18)          47 52837
(%i19) factor(20^5+20^3+20^2+20+1);
(%o19)          3208421
(%i20) factor(21^5+21^3+21^2+21+1);
(%o20)          2
                5 163753
(%i21) factor(22^5+22^3+22^2+22+1);
(%o21)          17 149 2039
(%i22) factor(23^5+23^3+23^2+23+1);
```



```
(%o22) 37 174299
(%i23) factor(24^5+24^3+24^2+24+1);
(%o23) 7977049
(%i24) factor(25^5+25^3+25^2+25+1);
(%o24) 89 131 839
(%i25) factor(26^5+26^3+26^2+26+1);
(%o25) 5 2379931
```

かなり、素数がえられる。これは、6から5つおきに5の倍数になっている。

```
(%o19) x5 + x3 + x2 + x + 1
(%i5) factor(6^5+6^3+6^2+6+1);
(%o5) 5 1607
(%i10) factor(11^5+11^3+11^2+11+1);
(%o10) 5 32503
(%i15) factor(16^5+16^3+16^2+16+1);
(%o15) 5 251 839
(%i20) factor(21^5+21^3+21^2+21+1);
(%o20) 5 163753
(%i25) factor(26^5+26^3+26^2+26+1);
(%o25) 5 2379931
```

なぜなんだろうか?

```
(%i1) factor((5*x+1)^5+(5*x+1)^3+(5*x+1)^2+(5*x+1)+1);
(%o1) 5 (625 x5 + 625 x4 + 275 x3 + 70 x2 + 11 x + 1)
(%i2) factor((5*x+1)^7+(5*x+1)^5+(5*x+1)^3+(5*x+1)^2+1);
(%o2) 5 (15625 x7 + 21875 x6 + 13750 x5 + 5000 x4 + 1150 x3 + 175 x2 + 17 x + 1)
```

なるほどこうなるわけだ。

```
> (%i4) factor(5^5+5^3+5^2+5+1);
> (%o4) 17 193
> (%i21) factor(22^5+22^3+22^2+22+1);
> (%o21) 17 149 2039
```

さて、これも、

```
(%i3) factor((17*x+5)^5+(17*x+5)^3+(17*x+5)^2+(17*x+5)+1);
(%o3) 17 (83521 x5 + 122825 x4 + 72539 x3 + 21522 x2 + 3211 x + 193)
```

より、5から17おきに現れるんだな。

5.1.19 素数探求  $x^5 + x^3 + 1$ 

```

(%i1) factor(x^5+x^3+1);
(%o1)      5      3
      x  + x  + 1
(%i2) factor(2^5+2^3+1);
(%o2)      41
(%i3) factor(3^5+3^3+1);
(%o3)      271
(%i4) factor(4^5+4^3+1);
(%o4)      2      2
      3  11
(%i5) factor(5^5+5^3+1);
(%o5)      3251
(%i6) factor(6^5+6^3+1);
(%o6)      7993
(%i7) factor(7^5+7^3+1);
(%o7)      3 5717
(%i8) factor(8^5+8^3+1);
(%o8)      23 1447
(%i9) factor(9^5+9^3+1);
(%o9)      59779
(%i10) factor(10^5+10^3+1);
(%o10)     3 131 257
(%i11) factor(11^5+11^3+1);
(%o11)     13 12491
(%i12) factor(12^5+12^3+1);
(%o12)     43 5827
(%i13) factor(13^5+13^3+1);
(%o13)     5
      3 29 53
(%i14) factor(14^5+14^3+1);
(%o14)     19 23 1237
(%i15) factor(15^5+15^3+1);
(%o15)     11 69341
(%i16) factor(16^5+16^3+1);
(%o16)     3 350891
(%i17) factor(17^5+17^3+1);
(%o17)     1424771
(%i18) factor(18^5+18^3+1);
(%o18)     109 17389
(%i19) factor(19^5+19^3+1);
(%o19)     3 37 22369
(%i20) factor(20^5+20^3+1);
(%o20)     3208001
(%i21) factor(21^5+21^3+1);
(%o21)     71 57653
(%i22) factor(22^5+22^3+1);
(%o22)     2
      3 573809

```

```
(%i23) factor(23^5+23^3+1);
(%o23)                                6448511
(%i24) factor(24^5+24^3+1);
(%o24)                                13 613573
(%i25) factor(25^5+25^3+1);
(%o25)                                3 3260417
(%i26) factor(26^5+26^3+1);
(%o26)                                11 1081723
```

において

```
> (%i4) factor(4^5+4^3+1);
>
> (%o4)                                2 2
>                                3 11
> (%i7) factor(7^5+7^3+1);
> (%o7)                                3 5717
> (%i10) factor(10^5+10^3+1);
> (%o10)                               3 131 257
> (%i13) factor(13^5+13^3+1);
>
>                                5
> (%o13)                               3 29 53
> (%i16) factor(16^5+16^3+1);
> (%o16)                               3 350891
> (%i19) factor(19^5+19^3+1);
> (%o19)                               3 37 22369
> (%i22) factor(22^5+22^3+1);
>
>                                2
> (%o22)                               3 573809
> (%i25) factor(25^5+25^3+1);
> (%o25)                               3 3260417
```

3 が定期的に出てくるので  $x$  を  $3x+1$  とおいてみると

```
(%i27) factor((3*x+1)^5+(3*x+1)^3+1);
(%o27)          5      4      3      2
          3 (81 x  + 135 x  + 99 x  + 39 x  + 8 x + 1)
```

となり、3 が頭にある。また、11 も定期的に見られるので

```
(%i28) factor((11*x+4)^5+(11*x+4)^3+1);
(%o28)          5      4      3      2
          11 (14641 x  + 26620 x  + 19481 x  + 7172 x  + 1328 x + 99)
```

となり 11 が頭にある。また、最初の 4 1 は

```
(%i29) factor((41*x+2)^5+(41*x+2)^3+1);
(%o29)          5      4      3      2
          41 (2825761 x  + 689210 x  + 68921 x  + 3526 x  + 92 x + 1)
```

となり周期的に見られる。次の 2 7 1 は

```
(%i30) factor((271*x+3)^5+(271*x+3)^3+1);
```

```
(%o30) 271 (5393580481 x5 + 298537665 x4 + 6683131 x3 + 75609 x2 + 432 x + 1)
```

となり周期的に現れる。

そこで、 $x^5 + x^3 + 1$  をいれてみると

```
(%i1) factor(((x^5+x^3+1)*x+x)^5+((x^5+x^3+1)*x+x)^3+1);
```

```
(%o1) (x5 + x3 + 1) (x25 + 4 x23 + 6 x21 + 9 x20 + 4 x19 + 27 x18 + x17
+ 27 x16 + 31 x15 + 9 x14 + 63 x13 + 33 x11 + 49 x10 + x9 + 54 x8 + 5 x6
+ 31 x5 + 7 x3 + 1)
```

となり、 $x^5 + x^3 + 1$  を因数にもつので、全ての数が繰り返して現れることがわかった。