

有理数と無理数

八野正

平成 24 年 7 月 18 日

1 進数と小数

ある数 x が、0 でない自然数 k の k 進数の数であるならば、(ただし、 A_i は、 $0 \leq A_i < k$ の整数である。)

$$x = \sum_{i=-\infty}^{i=\infty} A_i k^i \quad (1)$$

と表される。いま、小数部分を取り出して y とすると、

$$y = \sum_{i=-\infty}^{i=-1} A_i k^i$$

$$y = \frac{A_{-1}}{k^1} + \frac{A_{-2}}{k^2} + \frac{A_{-3}}{k^3} + \frac{A_{-4}}{k^4} + \dots$$

ここで、

$$y = \frac{a}{b}$$

とすると、通分により

$$b = \prod_{i=1}^{\infty} k^i$$

$$a = \prod_{i=1}^{\infty} k^i \frac{A_{-1}}{k^1} + \prod_{i=1}^{\infty} k^i \frac{A_{-2}}{k^2} + \prod_{i=1}^{\infty} k^i \frac{A_{-3}}{k^3} + \dots$$

したがって、 y は有理数になる。

2 無理数

無理数が、たとえば、今仮に、 $\sqrt{2}$ が、10 進数で小数以下が無限に続くとする

$$y = \sum_{i=-\infty}^{i=-1} A_i 10^i$$

$$y = \frac{A_{-1}}{10^1} + \frac{A_{-2}}{10^2} + \frac{A_{-3}}{10^3} + \frac{A_{-4}}{10^4} + \dots$$

ここで、と表され、各 1 桁は $\frac{A_n}{10^n}$ とあらわせる分数である。分数の和は通分できるから、 y は有理数である。

すると、無理数が有理数となって矛盾する。ゆえに、無理数は、10 進数の位取り記法の小数では表せない。

同じようにして、無理数はいかなる進数においても、位取り記法的小数では表せない。

3 有理数の進数の小数

同じく、ある数 x が、有理数 k の k 進数の数であるならば、

$$x = \sum_{i=-\infty}^{i=\infty} A_i k^i \quad (2)$$

であるから、いま、 $i < 0$ を取り出して y とすると、

$$y = \sum_{i=-\infty}^{i=-1} A_i k^i$$

$$y = \frac{A_{-1}}{k^1} + \frac{A_{-2}}{k^2} + \frac{A_{-3}}{k^3} + \frac{A_{-4}}{k^4} + \dots$$

であり、 $k = \frac{p}{q}$ ならば、

$$y = \frac{A_{-1}}{k^1} + \frac{A_{-2}}{k^2} + \frac{A_{-3}}{k^3} + \frac{A_{-4}}{k^4} + \dots$$

$$y = \frac{qA_{-1}}{p^1} + \frac{q^2A_{-2}}{p^2} + \frac{q^3A_{-3}}{p^3} + \frac{q^4A_{-4}}{p^4} + \dots$$

となり、 y は、分数の和であるから、通分により、有理数である。同じように、 $i > 0$ でも y は有理数である。 $i=0$ では、 A_i が 0 以上の整数なので、有理数である。

よって、有理数の進数の小数も有理数になる。

4 結論

以上から、もし、0 でない自然数の進数は、位取り記法的小数で表せるものなら、小数部が位取り記法により各桁は分数なので、総和は、有理数である。

また、有理数の進数を考えても有理数であった。

しかし、無理数は、いかなる進数でも、位取り記法で表せないので、有理数にならない。

したがって、ある数 x がいかなる進数でも、位取り記法的小数で表せるものなら、すべて、有理数である。

逆にいうと、小数は、位取り記法されているものなので、すべての小数は有理数である。