

x^n の約数の関数の素因数分解について

愛犬ベルのために

初版 2019年6月25日

1 はじめに

奇数の完全数 $a = x^n y^m z^l \dots$ の x^n の約数の関数の素因数分解を考えてみます。なお、 x は奇数の素数です。 x^n の約数の関数を $\sigma(x)$ と表し、

$$\sigma(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n$$

です。そこで、この $\sigma(x)$ の素因数分解に登場するのが、二項定理です。

2 二項定理

まあ、二項定理というと

$$(a + b)^n = {}_n C_0 a^n + \dots + b^n$$

ですね。 b^n を除いて、 ${}_n C_0 a^n + \dots$ はすべて、 a の項ですね。そこで、

$$(a + b)^n = {}_n C_0 a^n + \dots + b^n = aA + b^n$$

とすることができます。

さて、 x は奇数の素数ですから、 $\sigma(x)$ の素因数分解は、 $x - 2$ が素数であれば、含まれる可能性があります。ところで、

$$\sigma(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n$$

の x^r がすべて、約数に $x - 2$ をもち、 $1 + x$ も約数に $x - 2$ をもてば、 $\sigma(x)$ は $x - 2$ で割れます。

そこで、 $x^r = (x - 2 + 2)^r = \{(x - 2) + 2\}^r$ とおくと、先程の二項定理より $x^r = (x - 2)X_r + 2^r$ とできます。

$$x^0 = \{(x - 2) + 2\}^0 = (x - 2)X_0 + 2^0$$

$$x^1 = \{(x - 2) + 2\}^1 = (x - 2)X_1 + 2^1$$

$$x^2 = \{(x - 2) + 2\}^2 = (x - 2)X_2 + 2^2$$

$$\begin{aligned}
x^3 &= \{(x-2) + 2\}^3 = (x-2)X_3 + 2^3 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
x^r &= \{(x-2) + 2\}^r = (x-2)X_r + 2^r \\
&\cdot \\
&\cdot \\
x^n &= \{(x-2) + 2\}^n = (x-2)X_n + 2^n \\
+) &\underline{\hspace{10em}} \\
\sigma(x) &= (x-2)X_{sum} + 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^r + \dots + 2^n \\
\sigma(x) &= (x-2)X_{sum} + \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1}
\end{aligned}$$

となります。 $\frac{2^{n+1}-1}{2-1}$ が $x-2$ で割れれば、 $\sigma(x)$ は素数 $x-2$ を因数に持ちます。
ところで、 x は素数なので、 $x-2k$ は、素数になるでしょう。
すると、

$$\begin{aligned}
x^0 &= \{(x-2k) + 2k\}^0 = (x-2k)X_0 + (2k)^0 \\
x^1 &= \{(x-2k) + 2k\}^1 = (x-2k)X_1 + (2k)^1 \\
x^2 &= \{(x-2k) + 2k\}^2 = (x-2k)X_2 + (2k)^2 \\
x^3 &= \{(x-2k) + 2k\}^3 = (x-2k)X_3 + (2k)^3 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
x^r &= \{(x-2k) + 2k\}^r = (x-2k)X_r + (2k)^r \\
&\cdot \\
&\cdot \\
x^n &= \{(x-2k) + 2k\}^n = (x-2k)X_n + (2k)^n \\
+) &\underline{\hspace{10em}} \\
\sigma(x) &= (x-2k)X_{sum} + (2k)^0 + (2k)^1 + (2k)^2 + (2k)^3 + \dots + (2k)^r + \dots + (2k)^n \\
\sigma(x) &= (x-2k)X_{sum} + \frac{(2k)^{n+1} - 1}{2k - 1}
\end{aligned}$$

となりますから、 k を 1 から $x = x - 2k$ を代入して、 $x - 2k$ が素数であり、 $\frac{(2k)^{n+1}-1}{2k-1}$ が $x - 2k$ で割れれば、 $\sigma(x)$ を素因数分解できます。

そこで、

$$\frac{(2k)^{n+1} - 1}{(2k - 1)(x - 2k)} = P$$

において、 P が整数ならば、 $\sigma(x)$ は $x - 2k$ で割れるとなります。

2.1 $x=5$ のとき

$x = 5$ では、 $x - 2 = 3$ が考えられます。

$\sigma(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$ において $x - 2 = 3$ とすると、 $\sigma(x)$ の素因数分解に 3 が現れるから $P(x - 2k) = \frac{(2k)^{n+1} - 1}{2k - 1}$ より、 $k = 1$ なので、 $\frac{(2k)^{n+1} - 1}{2k - 1} = 3P$ とおける。

$$\frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 3P$$

$2^m - 1 = 1 \times 3P = 3P$ n は偶数なので m は奇数。

```
(%i1) mod(2^3-1,3);
(%o1) 1
(%i2) mod(2^5-1,3);
(%o2) 1
(%i3) mod(2^7-1,3);
(%o3) 1
(%i4) mod(2^9-1,3);
(%o4) 1
```

より、0にならない。また、繰り返しである。よって、 $P(x - 2) = 2^{n+1} - 1$ がありえず、 $\sigma(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$ において $x - 2 = 3$ はない。つまり、 $x = 5$ なら、 $\sigma(x)$ を素因数分解すると 3 を含まない。

$\sigma(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$ において $\sigma(x)$ が奇数で、つまり、 n が偶数の時、 $x = 5$ なら、 $\sigma(x)$ を素因数分解した時、3 は現れない、と言える。

2.2 $x=7$ のとき

$x = 7$ では、 $x - 2 = 5, x - 4 = 3$ が考えられます。

$\sigma(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$ において $x - 2 = 5$ とすると、 $\sigma(x)$ の素因数分解に 5 が現れるから $P(x - 2k) = \frac{(2k)^{n+1} - 1}{2k - 1}$ より、 $k = 1$ なので、 $\frac{(2k)^{n+1} - 1}{2k - 1} = 5P$ とおける。

$$\frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 5P$$

$2^m - 1 = 1 \times 5P = 5P$ n は偶数なので m は奇数。

```
(%i5) mod(2^3-1,5);
(%o5) 2
(%i6) mod(2^5-1,5);
(%o6) 1
(%i7) mod(2^7-1,5);
(%o7) 2
(%i8) mod(2^9-1,5);
(%o8) 1
```

より、0 にならない。よって、 $P(x - 2) = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1}$ がありえず、 $\sigma(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$ において $x - 2 = 5$ はない。つまり、 $x = 7$ なら、 $\sigma(x)$ を素因数分解すると 5 を含まない。

$\sigma(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$ において $x - 4 = 3$ とすると、 $\sigma(x)$ の素因数分解に 3 が現れるから $P(x - 2k) = \frac{(2k)^{n+1} - 1}{2k - 1}$ より、 $k = 2$ なので、 $\frac{(2k)^{n+1} - 1}{2k - 1} = 3P$ とおける。

$$\frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1} = 3P$$

$4^m - 1 = 3 \times 3P = 9P$ n は偶数なので m は奇数。

```
(%i32) mod(4^3-1,9);
(%o32) 0
(%i33) mod(4^5-1,9);
(%o33) 6
(%i34) mod(4^7-1,9);
(%o34) 3
(%i35) mod(4^9-1,9);
(%o35) 0
(%i36) mod(4^11-1,9);
(%o36) 6
(%i37) mod(4^13-1,9);
(%o37) 3
```

より、0 になるときがある。よって、 $p(x - 4) = \frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1}$ があり、 $\sigma(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$ において $x - 4 = 3$ はありえる。つまり、 $x = 7$ なら、 $\sigma(x)$ を素因数分解すると 3 を含む。

$\sigma(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$ において $\sigma(x)$ が奇数で、つまり、 n が偶数の時、 $x = 7$ なら、 $\sigma(x)$ を素因数分解した時、5 は現れない、と言える。

2.3 x=11 のとき

$x = 11$ では、 $x - 2 = 9(= 3 \times 3)$, $x - 4 = 7$, $x - 6 = 5$, $x - 8 = 3$ が考えられます。

$(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$ において $x - 2 = 9(= 3 \times 3)$ とすると、9 は素数でない
 なので、 $P(x - 2k) = \frac{(2k)^{n+1}-1}{2k-1}$ より、 $k = 1$ なので、よって、 $p(x - 2) = \frac{2^{n+1}-1}{2-1}$ がありえない。

$\sigma(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$ において $x - 4 = 7$ とすると、 $\sigma(x)$ の素因数分解に 7 が
 現れるから $P(x - 2k) = \frac{(2k)^{n+1}-1}{2k-1}$ より、 $k = 2$ なので、 $\frac{(2k)^{n+1}-1}{2k-1} = 7P$ とおける。

$$\frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1} = 7P$$

$4^m - 1 = 3 \times 7P = 21P$ n は偶数なので m は奇数。

```
(%i13) mod(4^3-1,21);
(%o13) 0
(%i14) mod(4^5-1,21);
(%o14) 15
(%i15) mod(4^7-1,21);
(%o15) 3
(%i16) mod(4^9-1,21);
(%o16) 0
(%i17) mod(4^11-1,21);
(%o17) 15
(%i18) mod(4^13-1,21);
(%o18) 3
(%i19) mod(4^15-1,21);
(%o19) 0
```

より、0 になるときがある。よって、 $p(x - 4) = \frac{4^{n+1}-1}{4-1}$ があり、 $\sigma(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$
 において $x - 4 = 7$ はありえる。つまり、 $x = 11$ なら、 $\sigma(x)$ を素因数分解すると 7 を含む。

$\sigma(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$ において $x - 6 = 5$ とすると、 $\sigma(x)$ の素因数分解に 5 が
 現れるから $P(x - 2k) = \frac{(2k)^{n+1}-1}{2k-1}$ より、 $k = 3$ なので、 $\frac{(2k)^{n+1}-1}{2k-1} = 5P$ とおける。

$$\frac{6^{n+1} - 1}{6 - 1} = 5P$$

$6^m - 1 = 5 \times 5P = 25P$ n は偶数なので m は奇数。

```
(%i20) mod(6^3-1,25);
(%o20) 15
(%i21) mod(6^5-1,25);
(%o21) 0
(%i22) mod(6^7-1,25);
```

(%o22)	10
(%i23) mod(6^9-1,25);	
(%o23)	20
(%i24) mod(6^11-1,25);	
(%o24)	5
(%i25) mod(6^13-1,25);	
(%o25)	15
(%i26) mod(6^15-1,25);	
(%o26)	0
(%i27) mod(6^17-1,25);	
(%o27)	10

より、0 になるときがある。よって、 $p(x-6) = \frac{6^{n+1}-1}{6-1}$ があり、 $\sigma(x) = 1+x+x^2+x^3+\dots+x^n$ において $x-6=5$ はありえる。つまり、 $x=11$ なら、 $\sigma(x)$ を素因数分解すると 5 を含む。

$\sigma(x) = 1+x+x^2+x^3+\dots+x^n$ において $x-8=3$ とすると、 $\sigma(x)$ の素因数分解に 3 が現れるから $P(x-2k) = \frac{(2k)^{n+1}-1}{2k-1}$ より、 $k=4$ なので、 $\frac{(2k)^{n+1}-1}{2k-1} = 3P$ とおける。

$$\frac{8^{n+1}-1}{8-1} = 3P$$

$8^m - 1 = 7 \times 3P = 21P$ n は偶数なので m は奇数。

(%i28) mod(8^3-1,21);	
(%o28)	7
(%i29) mod(8^5-1,21);	
(%o29)	7
(%i30) mod(8^7-1,21);	
(%o30)	7
(%i31) mod(8^9-1,21);	
(%o31)	7

より、0 にならない。よって、 $P(x-8) = \frac{(8^{n+1}-1)}{8-1}$ がありえず、 $\sigma(x) = 1+x+x^2+x^3+\dots+x^n$ において $x-8=3$ はない。つまり、 $x=11$ なら、 $\sigma(x)$ を素因数分解すると 3 を含まない。

$\sigma(x) = 1+x+x^2+x^3+\dots+x^n$ において $\sigma(x)$ が奇数で、つまり、 n が偶数の時、 $x=11$ なら、 $\sigma(x)$ を素因数分解した時、3 は現れない、と言える。

2.4 $x=13$ のとき

$x = 13$ では、 $x - 2 = 11, x - 4 = 9(= 3 \times 3), x - 6 = 7, x - 8 = 5, x - 10 = 3$ が考えられます。

$\sigma(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$ において $x - 2 = 11$ とすると、 $\sigma(x)$ の素因数分解に 11 が現れるから $P(x - 2k) = \frac{(2k)^{n+1} - 1}{2k - 1}$ より、 $k = 1$ なので、 $\frac{(2k)^{n+1} - 1}{2k - 1} = 11P$ とおける。

$$\frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 11P$$

$2^m - 1 = 1 \times 11P = 11P$ n は偶数なので m は奇数。

```
(%i3) mod(2^3-1,11);
(%o3) 7
(%i4) mod(2^5-1,11);
(%o4) 9
(%i5) mod(2^7-1,11);
(%o5) 6
(%i6) mod(2^9-1,11);
(%o6) 5
(%i7) mod(2^11-1,11);
(%o7) 1
(%i8) mod(2^13-1,11);
(%o8) 7
(%i10) mod(2^15-1,11);
(%o10) 9
(%i11) mod(2^17-1,11);
(%o11) 6
```

より、0 にならない。よって、 $P(x - 2) = \frac{(2^{n+1} - 1)}{2 - 1}$ がありえず、 $\sigma(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$ において $x - 2 = 11$ はない。つまり、 $x = 13$ なら、 $\sigma(x)$ を素因数分解すると 11 を含まない。

$\sigma(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$ において $x - 4 = 9(= 3 \times 3)$ とすると、9 は素数でないので $P(x - 2k) = \frac{(2k)^{n+1} - 1}{2k - 1}$ より、 $k = 2$ なので、よって、 $p(x - 4) = \frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1}$ がありえない。

$\sigma(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$ において $x - 6 = 7$ とすると、 $\sigma(x)$ の素因数分解に 7 が現れるから $P(x - 2k) = \frac{(2k)^{n+1} - 1}{2k - 1}$ より、 $k = 3$ なので、 $\frac{(2k)^{n+1} - 1}{2k - 1} = 7P$ とおける。

$$\frac{6^{n+1} - 1}{6 - 1} = 7P$$

$6^m - 1 = 5 \times 7P = 35P$ n は偶数なので m は奇数。

```
(%i12) mod(6^3-1,35);
(%o12) 5
(%i13) mod(6^5-1,35);
```

```

(%o13) 5
(%i14) mod(6^7-1,35);
(%o14) 5
(%i15) mod(6^9-1,35);
(%o15) 5

```

より、0にならない。よって、 $P(x-6) = \frac{6^{n+1}-1}{6-1}$ がありえず、 $\sigma(x) = 1+x+x^2+x^3+\dots+x^n$ において $x-6=7$ はない。つまり、 $x=13$ なら、 $\sigma(x)$ を素因数分解すると 7 を含まない。

$\sigma(x) = 1+x+x^2+x^3+\dots+x^n$ において $x-8=5$ とすると、 $\sigma(x)$ の素因数分解に 5 が現れるから $P(x-2k) = \frac{(2k)^{n+1}-1}{2k-1}$ より、 $k=4$ なので、 $\frac{(2k)^{n+1}-1}{2k-1} = 5P$ とおける。

$$\frac{8^{n+1}-1}{8-1} = 5P$$

$8^m - 1 = 7 \times 5P = 35P$ n は偶数なので m は奇数。

```

(%i16) mod(8^3-1,35);
(%o16) 21
(%i17) mod(8^5-1,35);
(%o17) 7
(%i18) mod(8^7-1,35);
(%o18) 21
(%i19) mod(8^9-1,35);
(%o19) 7

```

より、0にならない。よって、 $P(x-8) = \frac{8^{n+1}-1}{8-1}$ がありえず、 $\sigma(x) = 1+x+x^2+x^3+\dots+x^n$ において $x-8=5$ はない。つまり、 $x=13$ なら、 $\sigma(x)$ を素因数分解すると 5 を含まない。

$\sigma(x) = 1+x+x^2+x^3+\dots+x^n$ において $x-10=3$ とすると、 $\sigma(x)$ の素因数分解に 3 が現れるから $P(x-2k) = \frac{(2k)^{n+1}-1}{2k-1}$ より、 $k=5$ なので、 $\frac{(2k)^{n+1}-1}{2k-1} = 3P$ とおける。

$$\frac{10^{n+1}-1}{10-1} = 3P$$

$10^m - 1 = 9 \times 3P = 27P$ n は偶数なので m は奇数。

```

(%i20) mod(10^3-1,27);
(%o20) 0
(%i21) mod(10^5-1,27);
(%o21) 18
(%i22) mod(10^7-1,27);
(%o22) 9
(%i23) mod(10^9-1,27);
(%o23) 0
(%i24) mod(10^11-1,27);
(%o24) 18
(%i25) mod(10^13-1,27);

```

(%o25)

9

より、0 になるときがある。よって、 $p(x-10) = \frac{10^{n+1}-1}{10-1}$ があり、 $\sigma(x) = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n$ において $x-10=3$ はありえる。つまり、 $x=13$ なら、 $\sigma(x)$ を素因数分解すると 3 を含む。

$\sigma(x) = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n$ において $\sigma(x)$ が奇数で、つまり、 n が偶数の時、 $x=13$ なら、 $\sigma(x)$ を素因数分解した時、11, 7, 5 は現れない、と言える。