

バーゼル問題のオイラーの解法

愛犬ベルのために

最新 2022 年 10 月 15 日

更新履歴

初版 2022-10-3

第 1 版 2022-10-16

バーゼル問題の経緯は、「バーゼル問題とオイラー」¹に詳しく書かれています。オイラーは、数値計算の結果から、これは、 $\frac{\pi^2}{6}$ と確信するのです。有理数は四則演算で有理数で閉じているなんて、微塵も考えなかったでしょう。その後、以下に示す解法を見つけるのです。私にすれば、微分は、「有理数は四則演算で有理数で閉じている」を保証してくれるものなのか、甚だ疑問です。

1 バーゼル問題

バーゼル問題という wikipedia²と余録・バーゼル問題³とバーゼル問題の証明その 1 ~ オイラーの証明 ~⁴より参考にまとめたものです。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

を求める問題です。

1.1 収束することの証明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \cdots$$

¹<https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1583-12.pdf>

²<https://ja.wikipedia.org/wiki/バーゼル問題>

³<http://www.nagaizumicyou.net/my-room/study/taylor-y-1.html> ただし、- はアンダーバーに置き換えてください

⁴<https://stchopin.hatenablog.com/entry/2021/05/10/110224>

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2$$

よって、収束する。

1.2 オイラーの解法

$\sin(x)$ のマクローリン展開は、

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (1)$$

ここで、 $\sin(x)$ は $x = 0$ と $x = \pm n\pi$ (n は自然数) で、 $\sin(x) = 0$ であるから、因数定理より、

$$\sin(x) = x(x - \pi)(x + \pi)(x - 2\pi)(x + 2\pi)(x - 3\pi)(x + 3\pi) \dots \quad (2)$$

を得る。 $\sin(x) = 0$ は式 2 であるが、 $(x - \pi)$ を π で割って、 $(1 - \frac{x}{\pi})$ と変形しても、 $x = 0$ と $x = \pm n\pi$ (n は自然数) で、 $\sin(x) = 0$ であるから、因数定理をつかうと、

$$\sin(x) = x(1 - \frac{x}{\pi})(1 + \frac{x}{\pi})(1 - \frac{x}{2\pi})(1 + \frac{x}{2\pi})(1 - \frac{x}{3\pi})(1 + \frac{x}{3\pi}) \dots \quad (3)$$

を得る。これより、隣接する 2 項同士をかけると、

$$\sin(x) = x(1 - \frac{x^2}{\pi^2})(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2})(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}) \dots$$

展開すると、

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x\{1 - \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{2^2\pi^2} - \frac{1}{3^2\pi^2} \dots\}x^2 + \dots \\ \sin(x) &= x - \frac{1}{\pi^2}\{\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \dots\}x^3 + \dots \end{aligned}$$

ここで、式 1 と同じ形式になりましたから、式 1 の $-x^3$ 項同士を比べて、同じになるには、

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{\pi^2}\{\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \dots\}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \{\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \dots\}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

をえる。