

オイラー積について

2014.10.11 2 節追加

平成 26 年 10 月 11 日

1 オイラー積

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots \quad (1)$$

で、これに両辺に $\frac{1}{2^2}$ をかけるわけだ。

$$\frac{1}{2^2}\zeta(2) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{12^2} + \cdots \quad (2)$$

この 2 つの式を引くと奇数の項だけが残る。

$$\zeta(2) - \frac{1}{2^2}\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \cdots$$

$$\frac{3}{4}\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \cdots$$

となるのでしたね。したがって、奇数項だけの和は

$$\frac{3}{4}\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \cdots \quad (3)$$

また、一方 $\zeta(2)$ は、式 (1) より、

$$\frac{3}{4}\zeta(2) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots\right) \quad (4)$$

ともかけるので、奇数項と偶数項に分けると

$$\frac{3}{4}\zeta(2) = \frac{3}{4}\left\{\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{12^2} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \cdots\right)\right\} \quad (5)$$

とすると奇数項は式 (3) だから式 (4) になるわけですね。

ここで、偶数の集まりを

$$E = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{12^2} + \cdots \quad (6)$$

とすると、式 (5) は、

$$\frac{3}{4}\zeta(2) = \frac{3}{4}\left\{E + \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \cdots\right)\right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}\zeta(2) &= \frac{3}{4}\{E + \frac{3}{4}(E + \frac{3}{4}(E + \frac{3}{4}(E + \dots)))\} \\ \zeta(2) &= E + \frac{3}{4}(E + \frac{3}{4}(E + \frac{3}{4}(E + \dots))) \\ \zeta(2) &= \frac{4E+3}{4}(\frac{4E+3}{4}(\frac{4E+3}{4}(\dots))) \\ \zeta(2) &= \prod_{n \rightarrow \infty} (\frac{4E+3}{4})^n \end{aligned}$$

また、

$$E = \frac{1}{2^2}\zeta(2) = \frac{1}{4}\zeta(2)$$

なので、

$$\zeta(2) = \prod_{n \rightarrow \infty} (\frac{\zeta(2)+3}{4})^n \tag{7}$$

また、オイラーによって

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \tag{8}$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{\zeta(2)+3}{4} &= \frac{\frac{\pi^2}{6}+3}{4} = \frac{\frac{\pi^2+18}{6}}{4} \\ &= \frac{\pi^2+18}{24} = \frac{27.8696}{24} > 1 \end{aligned}$$

よって、

$$\zeta(2) = \prod_{n \rightarrow \infty} (\frac{\zeta(2)+3}{4})^n \rightarrow \infty \tag{9}$$

となり、式(8)と矛盾する。

2 オイラー積の問題点

いま、

$$f = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} \tag{10}$$

とすると、

$$f = \frac{bcde + acde + abde + abce + abcd}{abcde} \tag{11}$$

ですね。そこで $\frac{1}{p}$ を両辺にかけてみましょう。

$$f\frac{1}{p} = \frac{1}{pa} + \frac{1}{pb} + \frac{1}{pc} + \frac{1}{pd} + \frac{1}{pe} \tag{12}$$

$$f\frac{1}{p} = \frac{bcde + acde + abde + abce + abcd}{abcdep} \tag{13}$$

となります。式10、式12両辺を引くと

$$f - f\frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} - \left\{ \frac{1}{pa} + \frac{1}{pb} + \frac{1}{pc} + \frac{1}{pd} + \frac{1}{pe} \right\}$$

$$f - f\frac{1}{p} = \frac{bcde + acde + abde + abce + abcd}{abcde} - \left\{ \frac{bcde + acde + abde + abce + abcd}{abcdep} \right\}$$

$$f - f\frac{1}{p} = \frac{bcdep + acdep + abdep + abcep + abcdp - (bcde + acde + abde + abce + abcd)}{abcdep}$$

$$f - f\frac{1}{p} = \frac{bcde(p-1) + acde(p-1) + abde(p-1) + abce(p-1) + abcd(p-1)}{abcdep}$$

$$f - f\frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} \left(\frac{bcde + acde + abde + abce + abcd}{abcde} \right)$$

$$f - f\frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} \right)$$

そこで、オイラー積について考えてみましょう。 $a = 1^2, b = 2^2, c = 3^2, d = 4^2, e = 5^2, p = p^2$ となるわけですから、式1から式2の両辺を引くと、

$$\frac{3}{4}\zeta(2) = \frac{2^2-1}{2^2} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots \right)$$

より

$$\frac{3}{4}\zeta(2) = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots \right) \quad (14)$$

であって、式3にはならない。