

# 2進数は10進数の $\frac{1}{5}$ を表せない

愛犬ベルのために

最新 2023年4月7日

## 更新履歴

初版 2018年6月27日

第一版 2023年4月7日

## はじめに

2進数は10進数の $\frac{1}{5}$ を表せないという問題があります。例えば、 $\frac{1}{2} = 0.5$ 、 $\frac{1}{2^2} = 0.25$ 、 $\frac{1}{2^3} = 0.125$ 、 $\frac{1}{2^4} = 0.0625$ のように、末尾が5になるので、 $\frac{1}{5} = 0.2$ を2進数で表しても末尾が5なので、表せないのです。そこで、末尾が5になる証明をします。

## 1 末尾が5になる証明

2進数の少数の第 $n$ 桁目を10進数で表すと、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^n} &= \frac{10^n}{2^n} \frac{1}{10^n} \\ &= \frac{2^n 5^n}{2^n} \frac{1}{10^n} \\ &= \frac{5^n}{10^n} \\ &= \frac{5(4+1)^{n-1}}{10^n}\end{aligned}$$

ここで2項定理より

$$\begin{aligned}(4+1)^{n-1} &= {}_{n-1}C_0 4^{n-1} 1^0 + {}_{n-1}C_1 4^{n-2} 1^1 + {}_{n-1}C_2 4^{n-3} 1^2 + \cdots + {}_{n-1}C_{n-2} 4^1 1^{n-2} + {}_{n-1}C_{n-1} 4^0 1^{n-1} \\ (4+1)^{n-1} &= 4^{n-1} + {}_{n-1}C_1 4^{n-2} + {}_{n-1}C_2 4^{n-3} + \cdots + {}_{n-1}C_{n-2} 4 + 1 \\ &= 4A + 1\end{aligned}$$

となる。故に

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^n} &= \frac{5(4+1)^{n-1}}{10^n} \\ &= \frac{5(4A+1)}{10^n} \\ &= \frac{20A+5}{10^n} \\ &= \frac{20A}{10^n} + \frac{5}{10^n} \\ &= \frac{2A}{10^{n-1}} + \frac{5}{10^n}\end{aligned}$$

$A$  は自然数なので、 $\frac{5}{10^n}$  より、上位の桁である。  
したがって、末尾は5になる。

## 2 $\frac{1}{5}$ が2進数で表せた時

$\frac{1}{5}$  が2進数であらわせたとします。

$$\begin{aligned}\frac{1}{5} &= \frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \frac{1}{2^{a_3}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} \\ \frac{1}{5} &= \frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \frac{1}{2^{a_3}} + \cdots + \frac{2A}{10^{n-1}} + \frac{5}{10^n}\end{aligned}$$

右辺の末尾は5なので、左辺と一致しない。

よって、 $\frac{1}{5}$  は2進数では表せない。