

# アキレスと亀の原理による微分

2014年3月31日までのまとめ

2014年3月22日



# 目次

第 1 章	微分	7
1.1	アキレスと亀の原理 . . . . .	7
1.2	近似値 . . . . .	8
1.3	テーラー展開 . . . . .	8



# 表目次

## はじめに

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

による微分法は  $\Delta x = 0$  を許していません。なぜなら、分母が 0 になるからです。そこで、アキレスと亀の原理を利用すれば、 $\Delta x$  は特に断らなくても 0 になることはありません。



## 第 1 章

# 微分

微分法は、

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (1.1)$$

です。分母は  $\Delta x$  なので、0 ではないと注記されています。幾何学的にいうと微分は、接線ですから、2 点無いと線は固定できません。 $\Delta x = 0$  とすると、点ですから、その点を通る線は無数にありますから、許されないわけです。

### 1.1 アキレスと亀の原理

アキレスと亀の話では、幾何学的に言うとも必ず 2 点があるので、無限であっても線は固定できます。また、 $\Delta x$  は決して 0 になりません。

そこで、 $x + 1$  から  $x$  までアキレスと亀の論法で考えてみます。まず、 $x + 1$  から  $x$  までの中点は半分のところですね。 $x + 1 - \frac{1}{2}$  となります。この位置からまた半分  $x$  に寄りますから  $x + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$  というこのなので、

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (1.2)$$

は、

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \dots) - f(x)}{\Delta x}$$

ここで、

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \quad (1.3)$$

は、初項  $a = \frac{1}{2}$  公比  $r = \frac{1}{2}$  ですから、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \\ &= a \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - (\frac{1}{2})} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

より

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x + 1 - 1 + \frac{1}{2^{n+1}}) - f(x)}{\Delta x}$$

また、式 1.1 と比べて、

$$\Delta x = 1 - 1 + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} \quad (1.4)$$

となります。

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x + \frac{1}{2^{n+1}}) - f(x)}{\frac{1}{2^{n+1}}} \quad (1.5)$$

## 1.2 近似値

$x$  が  $a$  から  $a + \Delta x$  まで変化するとき、平均値の定理より

$$f(a + \Delta x) \doteq f(a) + f'(a)\Delta x \quad (1.6)$$

と置けます。

式 1.4 より、

$$f(a + \frac{1}{2^{n+1}}) \doteq f(a) + f'(a)\frac{1}{2^{n+1}} \quad (1.7)$$

と置けます。

## 1.3 テーラー展開