

背理法について

愛犬ベルのために

最新 2019 年 8 月 13 日

更新履歴

初版 2018 年 2 月 14 日
改定 2018 年 7 月 26 日
訂正 2018 年 8 月 1 日
追記 2018 年 8 月 6 日
追記 2018 年 8 月 7 日
追記 2019 年 2 月 21 日
追記 2019 年 8 月 12 日
訂正 2019 年 8 月 13 日

1 背理法

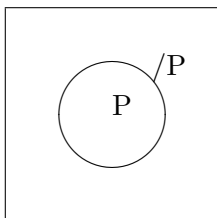
背理法は、

宣言 命題 P は真であるとする。

矛盾 矛盾の発見

結論 命題 P は偽である。

の手順を経て、命題 P は偽であるとする。



ベン図を書くとこうなる。 \bar{P} は集合 P の補集合である。 P が真でないので円 P の外が真である。

また、 $Q = \bar{P}$ とすると、

宣言 命題 Q は偽であるとする。

矛盾 矛盾の発見

結論 命題 Q は真である。

の手順を経て、命題 Q は真であるとする。Wikipedia はこの手順をとっている。

これを $Q = \overline{P}$ であるから

宣言 命題 Q は偽であるとする。つまり、 \overline{P} の否定が偽なので、否定の否定で、命題 P は真であるとする。となる。

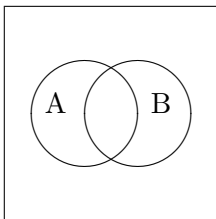
矛盾 矛盾の発見

結論 命題 Q は真である。つまり、 \overline{P} の否定が真であるので、命題 P は偽である。となる。

つまり、最初の P の手順もあとの Q の手順も全く同じものである。

1.1 P が A と B の論理積の場合

さて、 P が A と B の論理積の場合、問題が起きる。



P は A と B の論理積なので、 A と B の重なった部分である。 P が偽という事は、 A と B の重なった部分の外であり、 A でありながら、 B と重なってない部分や、 B でありながら A と重なってない部分と A, B の外を含むのである。

つまり、 A と B の論理積 $A * B$ の否定は、「 $A * B$ でない」ではないのである。

1.1.1 奇数の完全数

たとえば、 A は「奇数」、 B は「完全数」とすると、 A と B の論理積 $A * B$ は「奇数の完全数である」となるが、その否定は「奇数の完全数はない」ではなくて、「奇数であり完全数でない」領域と「完全数であり、奇数でない」領域と、「奇数でもないし、完全数でもない」領域を指すことがわかるであろう。

A と B の論理積 $A * B$ の否定は、 A が偽であれば、 B が真であろうと偽であろうと偽であるし、 B が偽であれば、 A が真であろうと偽であろうと偽である。

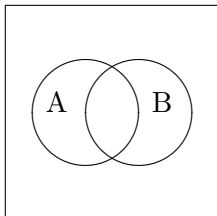
つまり、 $\overline{A * B} = \overline{A} + \overline{B}$ なのである。ここで、 $+$ は論理和を示す。これをドモルガンの法則という。したがって、論理積 $A * B$ の否定は、円 A の外か、円 B の外かのいずれかである。

すなわち、Pが「奇数の完全数である」であれば、その否定は、「奇数でない」あるいは「完全数でない」のいずれかであるとなる。先ほどの図を見ていただければわかるであろう。

したがって、命題Pは、2項以上の論理積であっては背理法は間違ってしまうのである。つまり、背理法は使えないのである。

1.1.2 $\sqrt{2}$ が無理数

例えば $\sqrt{2}$ が無理数である証明で、 $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ の有理数とし、 $\frac{a}{b}$ の a, b はお互いに素であると論理積で書かれていて、「矛盾」は $\frac{a}{b}$ の a, b はお互いに素であるに反する。よって、 $\sqrt{2}$ が無理数であるとしているが、これも、Aは $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ の有理数で、Bは $\frac{a}{b}$ の a, b はお互いに素であるの論理積であるから、



PはAとBの論理積なので、AとBの重なった部分である。Pが偽という事は、AとBの重なった部分の外であり、Aでありながら、Bと重なってない部分や、BでありながらAと重なってない部分とA,Bの外を含むのである。つまり、 $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ の有理数であり、 $\frac{a}{b}$ の a, b はお互いに素でない領域と、 $\frac{a}{b}$ の a, b はお互いに素であり、 $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ の有理数でない領域と、 $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ の有理数でないのと $\frac{a}{b}$ の a, b はお互いに素でない領域を指すことがわかる。

AとBの論理積 $A * B$ の否定は、Aが偽であれば、Bが真であろうと偽であると偽であるし、Bが偽であれば、Aが真であろうと偽であると偽である。

つまり、 $\overline{A * B} = \overline{A} + \overline{B}$ なのである。ここで、+は論理和を示す。これをドモルガンの法則という。したがって、論理積 $A * B$ の否定は、円Aの外か、円Bの外かのいずれかである。

すなわち、 $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ の有理数でないか、あるいは、 $\frac{a}{b}$ の a, b はお互いに素でないかのいずれかである。

したがって、命題Pは、2項以上の論理積であっては背理法は間違ってしまうのである。つまり、背理法は使えないのである。

1.2 真理値表と背理法

ある論理値を持つ A は、真偽 2 つの値をとるので、次のようになります。

番号	A
1	真
2	偽

したがって、ある論理値を持つ A, B の組み合わせは、

番号	A	B
1	真	真
2	真	偽
3	偽	真
4	偽	偽

のように、4 通りです。今背理法の命題が、1 番であれば、それを否定するので、残りの 2, 3, 4 が結論になります。また、背理法の命題が、1, 4 番で構成されるとき、それを否定するので、残りの 2, 3 が結論になります。また、背理法の命題が、1, 2, 3 番で構成されるとき、それを否定するので、残りの 4 が結論になります。

一般に命題が、 n 個の要素から成るとき、それぞれの要素は真偽 2 つの値をとるので、組み合わせは 2^n となります。目的とする結論が、どれにするかで、命題を構成する論理式は決まります。

例えば、 A, B 2 つの要素から成るとき、1 なら、命題は A, B の論理積であり、結論は残りの 2, 3, 4 の論理和が結論になります。それは、 A の否定と B の否定の論理和ですね。

1, 2 なら、命題は A であり、残りの 3, 4 つまり、 A の否定が結論になります。

1, 3 なら、命題は B であり、残りの 2, 4 つまり、 B の否定が結論になります。

2, 3 なら、命題は A, B の排他的論理和であり、残りの 1, 4 の論理和が結論になります。つまり、 A, B が共に真か A, B が共に偽ですね。

真理値表の 1 行は論理積を表し、上下は論理和を表します。したがって、今背理法の命題が、1 番であれば、 A と B の論理積であり、それを否定するので、残りの 2, 3, 4 が結論になります。つまり、残りの 2, 3, 4 が論理和です。それは、2 が $(A * \bar{B})$ 、3 が $(\bar{A} * B)$ 、4 が $(\bar{A} * \bar{B})$ となります。これをブール代数演算すると

$$\begin{aligned}
 & (A * \bar{B}) + (\bar{A} * B) + (\bar{A} * \bar{B}) \\
 = & (A * \bar{B}) + (\bar{A} * B) + (\bar{A} * \bar{B}) + (\bar{A} * \bar{B}) \quad \text{同じもの加えても変わらないので} \\
 = & (A * \bar{B}) + (\bar{A} * \bar{B}) + (\bar{A} * B) + (\bar{A} * \bar{B}) \quad \text{交換の法則より} \\
 = & (A + \bar{A}) * \bar{B} + \bar{A} * (B + \bar{B}) \quad \text{結合の法則より} \\
 = & 1 * \bar{B} + \bar{A} * 1 \quad \text{式 } A + \bar{A} = 1, B + \bar{B} = 1 \text{ より} \\
 = & \bar{B} + \bar{A} \quad \text{1 をかけても同じなので} \\
 = & \bar{A} + \bar{B} \quad \text{交換の法則より}
 \end{aligned}$$

となります。

1.2.1 命題の作成 「奇数の完全数はない」

番号	A	B
1	真	真
2	真	偽
3	偽	真
4	偽	偽

「奇数の完全数はない」は、「 A が奇数である」、「 B は完全数でない」という A と \bar{B} の論理積であるから、2番が結論である。という事は、命題は1,3,4でなければならない。つまり、 $(A * B) + (\bar{A} * B) + (\bar{A} * \bar{B})$ なので、

$$\begin{aligned} & (A * B) + (\bar{A} * B) + (\bar{A} * \bar{B}) \\ &= (A * B) + (\bar{A} * B) + (\bar{A} * B) + (\bar{A} * \bar{B}) \\ &= (A + \bar{A}) * B + \bar{A} * (B + \bar{B}) \\ &= 1 * B + \bar{A} * 1 \\ &= \bar{A} + B \end{aligned}$$

なので、背理法の命題は「奇数でないかあるいは完全数のいずれかとする」にすればよい。つまり、「偶数かあるいは完全数のいずれかとする」となる。これで、矛盾を指摘して、「偶数かあるいは完全数のいずれかとする」を否定すると「奇数の完全数はない」と結論できる。

1.2.2 命題の作成 「 $\sqrt{2}$ が無理数」

番号	A	B
1	真	真
2	真	偽
3	偽	真
4	偽	偽

「 $\sqrt{2}$ が無理数」は、 $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ とすると「Aが $\frac{a}{b}$ でa,bがお互いに素である」、「Bは $\frac{a}{b}$ は有理数である」というAと \bar{B} の論理積であるから、2番が結論である。という事は、命題は1,3,4でなければならない。つまり、 $(A * B) + (\bar{A} * B) + (\bar{A} * \bar{B})$ なので、

$$\begin{aligned}
 & (A * B) + (\bar{A} * B) + (\bar{A} * \bar{B}) \\
 = & (A * B) + (\bar{A} * B) + (\bar{A} * B) + (\bar{A} * \bar{B}) \\
 = & (A + \bar{A}) * B + \bar{A} * (B + \bar{B}) \\
 = & 1 * B + \bar{A} * 1 \\
 = & \bar{A} + B
 \end{aligned}$$

なので、背理法の命題は「 $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ とすると $\frac{a}{b}$ でa,bがお互いに素でないか、 $\frac{a}{b}$ は有理数のいずれかとする」にすればよい。これで、矛盾を指摘して、「 $\frac{a}{b}$ でa,bがお互いに素でないか $\frac{a}{b}$ は有理数のいずれかとする」を否定すると「 $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ とすると $\frac{a}{b}$ でa,bがお互いに素であり、 $\frac{a}{b}$ は有理数でない」と結論できる。

2 補足：ブール代数について

ブール代数は、論理変数の代数学ですが、論理変数は1,0のいずれかの値を取ります。1は真、0は偽です。

2.1 定理

2.1.1 定理 1 a

論理変数は1か0の何れかの値である。

2.1.2 定理 1 b

論理変数 A の否定を \bar{A} と表わす。

論理否定	
\bar{A}	A
1	0
0	1

2.1.3 定理 2

論理変数 A、B において論理和と論理積は以下に定義される。論理和は「+」、論理積は「*」を演算子として使う。普通の計算のように使うことができる。ただし $1 + 1 = 1$ だけが普通の計算と違う。

論理和		
A+B	A	B
0	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

論理積		
A*B	A	B
0	0	0
0	0	1
0	1	0
1	1	1

2.1.4 定理 3

$$A * A = A \quad (1)$$

$$A + A = A \quad (2)$$

この式は、良く使うので、大事である。

論理和	
A+A	A
0	0
1	1

論理積	
A*A	A
0	0
1	1

2.1.5 定理 4

交換の法則はブール代数にもあてはまる。

$$A * B = B * A \quad (3)$$

$$A + B = B + A \quad (4)$$

2.1.6 定理 5

分配の法則はブール代数にもあてはまる。

$$(A + B) * C = A * C + B * C \quad (5)$$

当然結合の法則もある。

$$A * C + B * C = (A + B) * C \quad (6)$$

2.1.7 定理 6

$$\overline{\overline{A}} = A \quad (7)$$

2.1.8 定理 7

$$A + 1 = 1 \quad (8)$$

$$A * 0 = 0 \quad (9)$$

これは、良く使う式である。

2.1.9 定理 8

$$A + \bar{A} = 1 \quad (10)$$

$$A * \bar{A} = 0 \quad (11)$$

また、

$$0 + 0 = 0 \quad (12)$$

$$0 * 0 = 0 \quad (13)$$

$$1 * 1 = 1 \quad (14)$$

$$1 + 1 = 1 \quad (15)$$

$$1 + 0 = 1 \quad (16)$$

$$1 * 0 = 0 \quad (17)$$

$$\bar{1} = 0 \quad (18)$$

$$\bar{0} = 1 \quad (19)$$

2.1.10 定理 9

$$A * (A + B) = A \quad (20)$$

$$A + A * B = A \quad (21)$$

証明

$$\begin{aligned} A * (A + B) &= A * A + A * B \\ &= A + A * B \\ &= A * (\bar{B} + B) + A * B \\ &= A * \bar{B} + A * B + A * B \\ &= A * \bar{B} + A * B \\ &= A(\bar{B} + B) \\ &= A * 1 \\ &= A \end{aligned}$$

証明終わり

2.1.11 定理 10

$$A * (\bar{A} + B) = A * B \quad (22)$$

$$A + \bar{A} * B = A + B \quad (23)$$

証明

$$\begin{aligned} A * (\bar{A} + B) &= \bar{A} * A + A * B \\ &= 0 + A * B \\ &= A * B \end{aligned}$$

証明終わり。

証明

$$\begin{aligned} A + \bar{A} * B &= A * (1 + B) + \bar{A} * B \\ &= A + A * B + \bar{A} * B \\ &= A + B * (A + \bar{A}) \\ &= A + B * 1 \\ &= A + B \end{aligned}$$

証明終了

2.1.12 定理 11

$$\bar{A}(A + B) = \bar{A} * B \quad (24)$$

$$\bar{A} + A * B = \bar{A} + B \quad (25)$$

定理 10 からあきらかである。

2.1.13 定理 12

$$(A + B) * (\bar{A} + C) = A * C + \bar{A} * B \quad (26)$$

証明

$$\begin{aligned} (A + B) * (\bar{A} + C) &= A * \bar{A} + A * C + \bar{A} * B + B * C \\ &= A * C + \bar{A} * B + B * C \\ &= A * C + \bar{A} * B + (A + \bar{A}) * B * C \\ &= A * C + \bar{A} * (B + B * C) + A * B * C \\ &= A * C + \bar{A} * B * (1 + C) + A * B * C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A * C + \bar{A} * B + A * B * C \\
&= A * C + A * B * C + \bar{A} * B \\
&= A * C * (1 + B) + \bar{A} * B \\
&= A * C + \bar{A} * B
\end{aligned}$$

証明終わり

2.1.14 定理 13

$$\overline{A * B} = \bar{A} + \bar{B} \quad (27)$$

$$\overline{A + B} = \bar{A} * \bar{B} \quad (28)$$

ド・モルガンの法則という。