

完全数について

愛犬ベルのために

2015年4月17日－中途版

目次

第 1 章	約束事	5
1.1	素因数分解	5
1.2	約数の総和の関数	5
第 2 章	基本的完全数	7
2.1	$a = uv$	7
2.2	$a = uvw$	8
2.3	$a = uw^n$	10
2.4	$a = uvw^n$	11
第 3 章	高次数の完全数	13
3.1	$a = v^m w^n$	13

はじめに

完全数は、紀元前からのテーマだそうです。さて、昨年だったか一昨年だったかのある日、「私の遺産を相続してくれないか」と言われて目が覚めました。それから何日かして、またその人が、「完全数なんだが・・・」と言われて、目が覚めました。

というようなことで、始めたのです。

第 1 章

約束手

素数でない自然数 a の約数の総和の関数 $\sigma(a)$ との関係が $2a = \sigma(a)$ となる時、 a は完全数という。ここでは、完全数について予め以下の項で出てくることについて説明する。

1.1 素因数分解

自然数 a は、合成数なので素因数分解できます。例えば、 6 は、 $6 = 2 \times 3$ ですね。 $2, 3$ は素数ですね。ですから、一般に a を素因数分解した $a = bcd \cdots v^m w^n x^p \cdots$ において、 $b, c, d, \cdots v, w, x, \cdots$ はすべて異なる素数であり、 $b < c < d < \cdots, v < w < x < \cdots$ であるものとする。もちろん、指数 $m, n, p \cdots$ は 2 以上の自然数であることは言うまでもない。

1.2 約数の総和の関数

a を素因数分解したら $a = uv$ であるとき、約数は $1, u, v, uv$ ですから、約数の総和の関数は、

$$1 + u + v + uv = (1 + u)(1 + v) = \sigma(a) \quad (1.1)$$

また、 a を素因数分解したら $a = v^n$ であるとき、約数は $1, v, v^2, v^3, v^4, v^5, \cdots, v^n$ ですから、

$$1 + v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5 + \cdots + v^{n-1} + v^n = \sigma(a) \quad (1.2)$$

と、なります。

では、 a を素因数分解したら $a = uvw^n$ であるとき、約数は $1, u, v, uv$ と $1, v, v^2, v^3, v^4, v^5, \cdots, v^n$ との組み合わせですから、

$$(1 + u)(1 + v)(1 + v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5 + \cdots + v^{n-1} + v^n) = \sigma(a) \quad (1.3)$$

となりますね。

1.2.1 等比級数の和

式 1.2 は等比級数の和公式から

$$1 + v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5 + \cdots + v^{n-1} + v^n = \frac{v^{n+1} - 1}{v - 1} \quad (1.4)$$

とすることができます。

また、

$$1 + v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5 + \cdots + v^{n-1} + v^n = 1 + v(1 + v(1 + v(1 + \cdots))) \cdots \quad (1.5)$$

なので、式 1.5 は約数に v を持つことはありません。ですから v^s も約数に持ちません。これらは、以下において非常に重要なことです。

1.2.2 $(1 + u)$ について

$u + 1$ は $u = 2$ でなければ、偶数である。同様に、また、 $u - 1$ は $u = 2$ でなければ、偶数である。しかし、

$$u + 1 = 2^n$$

$$u = 2^n - 1$$

では、 u はメルセンヌ数であり、その場合 $u + 1 = 2^n$ という具合に単なる偶数ではなく 2^n である。また、以後出てくる $u - 1$ も同様に、 $u - 1 = 2^n$ は $u = 2^n + 1$ のフェルマー数であり、その場合 $u - 1 = 2^n$ という具合に単なる偶数ではなく 2^n である。厳密には、フェルマー数は $u = 2^{2^r} + 1$ 型の素数をいうが、ここでは $u = 2^n + 1$ を総称してフェルマー数という事にする。

これらは、以下において非常に重要なことです。

第2章

基本的完全数

以下 a の素因数分解の形式に沿って検討する。

2.1 $a = uv$

a を素因数分解したら $a = uv$ であるとき、

$$(a) = (1 + u)(1 + v)$$

また、

$$2a = (a)$$

より、

$$2uv = (1 + u)(1 + v)$$

$$2uv = uv + u + v + 1$$

$$uv - u - v - 1 = 0$$

$$uv - u - v + 1 - 2 = 0$$

$$uv - u - v + 1 = 2$$

$$(u - 1)(v - 1) = 2$$

u, v は素数なので、 $(u-1), (v-1) = 2, 1$ または $(u-1), (v-1) = 1, 2$ より、 $u = 3, v = 2$ または $u = 2, v = 3$ なので、 $a = 6$ です。

よって、

$$(a) = (1 + u)(1 + v) = (1 + 2) \times (1 + 3) = 3 \times 4 = 12$$

より、 $2a = (a)$ であるから、6 は完全数です。したがって、 $a = uv$ 形式の場合、 $a = 6$ のみ完全数です。

2.2 $a = uvw$

a を素因数分解したら $a = uvw$ であるとき、

$$(a) = (1+u)(1+v)(1+w)$$

また、

$$2a = (a)$$

より、

$$\begin{aligned} 2uvw &= (1+u)(1+v)(1+w) \\ 2uvw &= 1+u+v+w+uv+vw+uw+uvw \\ uvw - uw - uv - vw - u - v - w - 1 &= 0 \end{aligned}$$

ところで

$$\begin{aligned} (u-1)(v-1)(w-1) &= uvw - uv - vw - uw + u + v + w - 1 \\ (u-1)(v-1)(w-1) - 2(u+v+w) &= uvw - uv - vw - uw + u + v + w - 1 - 2(u+v+w) \\ (u-1)(v-1)(w-1) - 2(u+v+w) &= uvw - uw - uv - vw - u - v - w - 1 \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} uvw - uw - uv - vw - u - v - w - 1 &= 0 \\ (u-1)(v-1)(w-1) - 2(u+v+w) &= 0 \\ (u-1)(v-1)(w-1) &= 2(u+v+w) \end{aligned}$$

2.2.1 $u = 2$ a が偶数

さて、 u, v, w は a を素因数分解した素数であるので、皆異なる。いま、 a が偶数つまり、 $u = 2$ とすると、

$$\begin{aligned} (2-1)(v-1)(w-1) &= 2(2+v+w) \\ (v-1)(w-1) &= 4+2v+2w \\ vw - v - w + 1 &= 4+2v+2w \\ vw - 3v - 3w - 3 &= 0 \\ vw &= 3(v+w+1) \end{aligned}$$

左辺は素数の積の奇数、右辺は3の倍数であり、3は素数なので、 v, w のいずれかが3でなければならないので、 $v = 3$ とすると、

$$\begin{aligned} 3w &= 3(3+w+1) \\ 3w &= 3(w+4) \\ 3w &= 3w+12 \end{aligned}$$

これは成り立たない。

2.2.2 $u > 2$ a が奇数

$u > 2$ ならば、 u, v, w は a を素因数分解した素数であるので、皆異なる。

$$(u-1)(v-1)(w-1) = 2(u+v+w)$$

において、 $(u-1), (v-1), (w-1)$ は全て、偶数なので、 $(u-1)(v-1)(w-1)$ は、最低でも $8G$ (但し、 G は正の整数) である。もし、 $(u-1), (v-1), (w-1)$ のいずれかがフェルマー数なら、 $2^n G > 8G$ となる。

$$8G = 2(u+v+w)$$

$$4G = u+v+w$$

左辺は偶数、右辺は奇数なので成り立たない。よって、 $a = uvw$ は、完全数にならない。

2.3 $a = uw^n$

a を素因数分解したら $a = uw^n$ であるとき、

$$(a) = (1+u)(1+w+w^2+w^3+\cdots+w^{n-1}+w^n)$$

ここで、 a が完全数であれば、

$$2uw^n = (1+u)(1+w+w^2+w^3+\cdots+w^{n-1}+w^n)$$

であるが、

$$(1+w+w^2+w^3+\cdots+w^{n-1}+w^n) = 1+w(1+w(1+w(1+\cdots)))$$

より、 $(1+w+w^2+w^3+\cdots+w^{n-1}+w^n)$ は、 w の累乗にはなれないので、

$$(1+w+w^2+w^3+\cdots+w^{n-1}+w^n) = u$$

であり、 $1+u$ が偶数なので

$$(1+u) = 2w^n \tag{2.1}$$

でなければならない。ここで、等比級数の和の公式から、

$$(1+w+w^2+w^3+\cdots+w^{n-1}+w^n) = \frac{w^{n+1}-1}{w-1} = u$$

よって、

$$\frac{w^{n+1}-1}{w-1} = u$$

$$\frac{w^{n+1}-1}{w-1} = 2w^n - 1 \text{ 式 2.1 より}$$

$$w^{n+1}-1 = (w-1)(2w^n-1)$$

$$w^{n+1}-1 = 2w^{w+1}-w-2w^n+1$$

$$w^{n+1}-w-2w^n+2=0$$

$$w(w^n-1)-2(w^n-1)=0$$

$$(w^n-1)(w-2)=0$$

ゆえに、 $w^n = 1$ または $w = 2$ である。したがって、

$$(1+u) = 2w^n$$

$$u = 2 \times 2^n - 1$$

$$u = 2^{n+1} - 1$$

よって、

$$a = (2^{n+1} - 1)2^n \tag{2.2}$$

u はメルセンヌ数であり、 a の形式の完全数をオイラー完全数という。

2.4 $a = uvw^n$

a を素因数分解したら $a = uvw^n$ であるとき、

$$(a) = (1+u)(1+v)(1+w+w^2+\cdots+w^n)$$

より、完全数であるには、

$$\begin{aligned} 2a &= (a) \\ 2uvw^n &= (1+u)(1+v)(1+w+w^2+\cdots+w^n) \end{aligned} \quad (2.3)$$

である。 $(1+w+w^2+\cdots+w^n)$ は w で割り切れないので、 w^s の項を持たない。であるから、 $(1+u)(1+v)(1+w+w^2+\cdots+w^n)$ は、 $(1+u)$ と $(1+v)$ と $(1+w+w^2+\cdots+w^n)$ の3つに分けられるとすると、

$$\begin{aligned} (1+u) &= 2vw^n & 1+u \text{ は偶数のため} \\ (1+v) &= 2qu & 1+v \text{ は偶数のため} \end{aligned}$$

とすると、 $(1+w+w^2+\cdots+w^n)$ に対応するものがない。 u, v を入れ替えても同じなので、 $(1+u)(1+v)(1+w+w^2+\cdots+w^n)$ は、 $(1+u)(1+v)$ と $(1+w+w^2+\cdots+w^n)$ に分けられる。ここで、 u, v, w はいずれも2でないとする。

2.4.1 u, v, w はいずれも2でないとき a が奇数

$$\begin{aligned} (1+u)(1+v) &= 4qw^n & 1+u \text{ は偶数、} 1+v \text{ は偶数のため} \\ (1+w+w^2+\cdots+w^n) &= uv & n \text{ は偶数のとき} \end{aligned}$$

さて、

$$\begin{aligned} 2uvw^n &= (1+u)(1+v)(1+w+w^2+\cdots+w^n) \\ 2uvw^n &= 4quvw^n \\ 1 &= 2q \\ q &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} (1+u)(1+v) &= 4qw^n \\ (1+u)(1+v) &= 2w^n \end{aligned} \quad (2.4)$$

また、 $(1+w+w^2+\cdots+w^n)$ が n は奇数のとき偶数である。 $(1+w+w^2+\cdots+w^n) = 2puv$ とおく。すると、式 2.3 より、 $2uvw^n = (1+u)(1+v)(1+w+w^2+\cdots+w^n)$ 右辺は全て偶数なので $8G$ とおく。 G は正の整数

$$2uvw^n = 8G$$

$$uvw^n = 4G$$

したがって、左辺は奇数なのでこれはありえない。

n が奇数の時 $(1 + w + w^2 + \cdots + w^n)$ は偶数なので

$$(1 + w + w^2 + \cdots + w^n) = uv$$

ところで、右辺が素数 uv の積なので、奇数であり、この式は成り立たない。

2.4.2 $u = 2$ のとき a が偶数

$u = 2$ のとき、式 2.3 より、

$$2uvw^n = (1 + u)(1 + v)(1 + w + w^2 + \cdots + w^n)$$

$$4vw^n = 3(1 + v)(1 + w + w^2 + \cdots + w^n)$$

左辺の v, w は素数なので、右辺の 3 も素数であるから $v = 3$ となる。これより、

$$12w^n = 12(1 + w + w^2 + \cdots + w^n)$$

$$w^n = (1 + w + w^2 + \cdots + w^n)$$

これは、成り立たない。なぜなら、等比級数の和の公式から

$$\frac{w^{n+1} - 1}{w - 1} = (1 + w + w^2 + \cdots + w^n)$$

よって、

$$\frac{w^{n+1} - 1}{w - 1} = w^n$$

$$w^{n+1} - 1 = (w - 1)w^n$$

$$w^{n+1} - 1 = w^{n+1} - w^n$$

$$1 = w^n$$

$w > 2$ であるから、 $u = 2$ でない。

以上から $a = uvw^n$ は完全数にならない。

第3章

高次数の完全数

3.1 $a = v^m w^n$

$a = v^m w^n$ のとき、

$$(a) = (1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^m)(1 + w + w^2 + w^3 + \cdots + w^n) \quad (3.1)$$

a が完全数ならば、 $2a = (a)$

$$2v^m w^n = (1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^m)(1 + w + w^2 + w^3 + \cdots + w^n) \quad (3.2)$$

である。

3.1.1 とともに偶数

$(1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^m)$ が偶数 よって v は 2 でない。

$(1 + w + w^2 + w^3 + \cdots + w^n)$ が偶数 よって w は 2 でない。

なら、式 3.2 は、

$$2v^m w^n = 4G$$

$$v^m w^n = 2G \quad \text{左辺は奇数、右辺は偶数}$$

でありえない。

3.1.2 いずれかが偶数で $v > 2, w > 2$

$(1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^m)$ が奇数あるいは偶数で

$(1 + w + w^2 + w^3 + \cdots + w^n)$ が偶数あるいは奇数なら

なら、式 3.2 は、

$$2v^m w^n = 2G$$

$$v^m w^n = G$$

式 3.2 より、

$$(1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^m) = 2w^n, w^m$$

$$(1 + w + w^2 + w^3 + \cdots + w^n) = v^m, 2v^m$$

である。

さて、

$$\frac{v^{m+1} - 1}{v - 1} = (1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^m) = 2w^n$$

$$\frac{w^{n+1} - 1}{w - 1} = (1 + w + w^2 + w^3 + \cdots + w^n) = v^m$$

から、

$$\frac{v^{m+1} - 1}{v - 1} = 2w^n$$

$$v^{m+1} - 1 = (v - 1)2w^n$$

$$v^{m+1} = (v - 1)2w^n + 1$$

$$v^m = \frac{(v - 1)2w^n + 1}{v}$$

より、

$$\frac{w^{n+1} - 1}{w - 1} = v^m$$

$$\frac{w^{n+1} - 1}{w - 1} = \frac{(v - 1)2w^n + 1}{v}$$

$$(w^{n+1} - 1)v = \{(v - 1)2w^n + 1\}(w - 1)$$

$$vw^{n+1} - v = \{2vw^n - 2w^n + 1\}(w - 1)$$

$$vw^{n+1} - v = \{2vw^{n+1} - 2w^{n+1} + w\} - \{2vw^n - 2w^n + 1\}$$

$$vw^{n+1} - v = 2vw^{n+1} - 2w^{n+1} + w - 2vw^n + 2w^n - 1$$

$$-v = vw^{n+1} - 2w^{n+1} + w - 2vw^n + 2w^n - 1$$

$$vw^{n+1} - 2w^{n+1} + w - 2vw^n + 2w^n - 1 + v = 0$$

$$w^{n+1}(v - 2) - 2w^n(v - 1) + (v - 1) + w = 0$$

$$w^{n+1}(v - 2) - (2w^n - 1)(v - 1) + w = 0$$

$$w^{n+1}(v - 1) - (2w^n - 1)(v - 1) - w^{n+1} + w = 0$$

$$(w^{n+1} - (2w^n - 1))(v - 1) - w^{n+1} + w = 0$$

$$(w^{n+1} - 2w^n + 1)(v - 1) - w(w^n - 1) = 0$$

$$(w^{n+1} - w^n - w^n + 1)(v - 1) - w(w^n - 1) = 0$$

$$(w(w^n - 1) - (w^n - 1))(v - 1) - w(w^n - 1) = 0$$

$$(w^n - 1)(w - 1)(v - 1) - w(w^n - 1) = 0$$

$$(w^n - 1)\{(w - 1)(v - 1) - w\} = 0$$

$w^n = 1$ ではないから、

$$(w - 1)(v - 1) - w = 0$$

$$(w - 1)(v - 1) = w$$

$$v - 1 = \frac{w}{w - 1}$$

$$v = \frac{w}{w - 1} + 1$$

ここで、 w は素数だから $\frac{w}{w-1}$ は整数でない。ところが左辺は整数なので、これは成り立たない。 w, v を入れ替えても同じである。

3.1.3 いずれかが偶数で $v = 2, w > 2$

$$(1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^m) \text{ が奇数}$$

$$(1 + w + w^2 + w^3 + \cdots + w^n) \text{ が偶数}$$

なら、式 3.2 は、

$$2 \times 2^m w^n = 2G$$

$$2^m w^n = G$$

左辺偶数、右辺奇数で成り立たない。

いずれも奇数

$$(1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^m) \text{ 奇数}$$

$$(1 + w + w^2 + w^3 + \cdots + w^n) \text{ 奇数}$$

なら、式 3.2 は、

$$2v^m w^n = G$$

左辺偶数、右辺奇数で成り立たない。

以上から、 $a = v^m w^n$ のとき、 a は完全数でない。

今日はここまで。