

奇数の完全数はない

愛犬ベルのために

2018年2月20日

更新履歴

初版 2015年2月11日
改定 2015年8月2日
改定 2016年6月18日
修正 2016年6月19日
改定 2016年7月9日
改定 2018年2月17日
補足 2018年2月18日
訂正補足 2018年2月19日
訂正 2018年2月20日

1 はじめに

完全数は、紀元前からのテーマだそうです。そして、Webを探せば、「奇数の完全数はない」証明はいっぱいあるでしょう。なんで、そんなつまらないことを私もする必要があるのか。

さて、昨年だったか一昨年だったかのある日、「私の遺産を相続してくれないか」と言われて目が覚めました。それから何日かして、またその人が、「完全数なんだが・・・」と言われて、目が覚めました。

というようなことで、始めたのです。

2 完全数

素数でない自然数 a は、素因数分解できます。例えば、6 は、 $6 = 2 \times 3$ ですね。2, 3 は素数ですね。 a が完全数であることは、 a の約数の総和の関数を $\sigma(a)$ とすると、 $2a = \sigma(a)$ となることです。また、 $ka = \sigma(a)$ 但し k は正の整数 のとき、倍積完全数という。

2.1 約数の総和の関数

自然数 a を素因数分解したら $a = uv$ であるとき、約数は $1, u, v, uv$ ですから、約数の総和の関数は、

$$1 + u + v + uv = (1 + u)(1 + v) = (a) \quad (1)$$

また、自然数 a を素因数分解したら $a = v^n$ であるとき、約数は $1, v, v^2, v^3, v^4, v^5, \dots, v^n$ ですから、

$$1 + v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5 + \dots + v^{n-1} + v^n = (a) \quad (2)$$

と、なります。

では、自然数 a を素因数分解したら $a = uvw^n$ であるとき、約数は $1, u, v, uv$ と $1, v, v^2, v^3, v^4, v^5, \dots, v^n$ との組み合わせですから、

$$(1 + u)(1 + v)(1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + \dots + w^{n-1} + w^n) = (a) \quad (3)$$

となりますね。

そこで以降は、自然数 a は合成数としその素因数分解で検討する。したがって、 a を素因数分解した $a = bcd \cdots v^m w^n x^p \cdots$ において、 $b, c, d, \dots, v, w, x, \dots$ はすべて異なる素数であり、 $b < c < d < \dots, v < w < x < \dots$ であるものとする。もちろん、 $m, n, p \cdots$ は2以上の自然数である。

また、 $u + 1$ は $u = 2$ でなければ、偶数である。同様に、また、 $u - 1$ は $u = 2$ でなければ、偶数である。しかし、

$$u + 1 = 2^n$$

$$u = 2^n - 1$$

では、 u はメルセンヌ数であり、その場合 $u + 1 = 2^n$ という具合に単なる偶数ではなく 2^n である。同様に、 $u - 1 = 2^n$ は $u = 2^n + 1$ のフェルマー数であり、その場合 $u - 1 = 2^n$ という具合に単なる偶数ではなく 2^n である。ただし、フェルマー数は、 $2^{2^r} + 1$ 形式の素数であるが、ここでは $u = 2^n + 1$ をフェルマー数とする。

また、等比級数の和の公式から

$$1 + v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5 + \dots + v^{n-1} + v^n = \frac{v^{n+1} - 1}{v - 1} \quad (4)$$

でもある。さらに、

$$1 + v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5 + \dots + v^{n-1} + v^n = 1 + v(1 + v(1 + \dots)) \cdots \quad (5)$$

なので、この式5は、左辺の総和が、約数として v, v^r を持つことはない。

以上のことも注意する。

2.2 $a = u$

a を素因数分解したら $a = u$ であるとき、つまり、 a が素数の時。

$$(a) = (1 + u)$$

また、

$$2a = (a)$$

より、

$$2a = 1 + u$$

$$2a = 1 + a$$

$$a = 1$$

となって、 a は素数になりません。したがって、以下では、 a は合成数とします。

2.3 $a = uv$

a を素因数分解したら $a = uv$ であるとき、

$$(a) = (1 + u)(1 + v)$$

また、

$$2a = (a)$$

より、

$$2uv = (1 + u)(1 + v)$$

$$2uv = uv + u + v + 1$$

$$uv - u - v - 1 = 0$$

$$uv - u - v + 1 - 2 = 0$$

$$uv - u - v + 1 = 2$$

$$(u - 1)(v - 1) = 2$$

u, v は素数なので、 $(u - 1), (v - 1) = 2, 1$ または $(u - 1), (v - 1) = 1, 2$ より、 $u = 3, v = 2$ または $u = 2, v = 3$ なので、 $a = 6$ です。

よって、

$$(a) = (1 + u)(1 + v) = (1 + 2) \times (1 + 3) = 3 \times 4 = 12$$

より、 $2a = (a)$ であるから、 6 は完全数です。したがって、 $a = uv$ 形式の場合、 $a = 6$ のみ完全数です。

2.4 $a = uvw$

a を素因数分解したら $a = uvw$ であるとき、

$$(a) = (1 + u)(1 + v)(1 + w)$$

また、

$$2a = (a)$$

より、

$$2uvw = (1 + u)(1 + v)(1 + w)$$

$$2uvw = 1 + u + v + w + uv + vw + uw + uvw$$

$$uvw - uw - uv - vw - u - v - w - 1 = 0$$

ところで

$$(u - 1)(v - 1)(w - 1) = uvw - uv - vw - uw + u + v + w - 1$$

$$(u - 1)(v - 1)(w - 1) - 2(u + v + w) = uvw - uv - vw - uw + u + v + w - 1 - 2(u + v + w)$$

$$(u - 1)(v - 1)(w - 1) - 2(u + v + w) = uvw - uw - uv - vw - u - v - w - 1$$

したがって、

$$uvw - uw - uv - vw - u - v - w - 1 = 0$$

$$(u - 1)(v - 1)(w - 1) - 2(u + v + w) = 0$$

$$(u - 1)(v - 1)(w - 1) = 2(u + v + w)$$

2.4.1 $u = 2$ a が偶数

さて、 u, v, w は a を素因数分解した素数であるので、皆異なる。いま、 a が偶数つまり、 $u = 2$ とすると、

$$(2 - 1)(v - 1)(w - 1) = 2(2 + v + w)$$

$$(v - 1)(w - 1) = 4 + 2v + 2w$$

$$vw - v - w + 1 = 4 + 2v + 2w$$

$$vw - 3v - 3w - 3 = 0$$

$$vw = 3(v + w + 1)$$

左辺は素数の積の奇数、右辺は3の倍数であり、3は素数なので、 v, w のいずれかが3でなければならぬので、 $v = 3$ とすると、

$$3w = 3(3 + w + 1)$$

$$3w = 3(w + 4)$$

$$3w = 3w + 12$$

これは成り立たない。

2.4.2 $u > 2$ a が奇数

$u > 2$ ならば、 u, v, w は a を素因数分解した素数であるので、皆異なる。

$$(u-1)(v-1)(w-1) = 2(u+v+w)$$

において、 $(u-1), (v-1), (w-1)$ は全て、偶数なので、 $(u-1)(v-1)(w-1)$ は、最低でも $8G$ (但し、 G は正の整数) である。

$$8G = 2(u+v+w)$$

$$4G = u+v+w$$

左辺は偶数、右辺は奇数なので成り立たない。 よって、 $a = uvw$ は、完全数にならない。

2.5 $a = uw^n$

a を素因数分解したら $a = uw^n$ であるとき、

$$(a) = (1 + u)(1 + w + w^2 + w^3 + \cdots + w^{n-1} + w^n)$$

ここで、 a が完全数であれば、

$$2uw^n = (1 + u)(1 + w + w^2 + w^3 + \cdots + w^{n-1} + w^n)$$

であるが、

$$(1 + w + w^2 + w^3 + \cdots + w^{n-1} + w^n) = 1 + w(1 + w(1 + w(1 + \cdots)))$$

より、 $(1 + w + w^2 + w^3 + \cdots + w^{n-1} + w^n)$ は、 w の累乗にはなれないので、

$$(1 + w + w^2 + w^3 + \cdots + w^{n-1} + w^n) = u$$

であり、 $1 + u$ が偶数なので

$$(1 + u) = 2w^n \tag{6}$$

でなければならない。ここで、等比級数の和の公式から、

$$(1 + w + w^2 + w^3 + \cdots + w^{n-1} + w^n) = \frac{w^{n+1} - 1}{w - 1} = u$$

よって、

$$\frac{w^{n+1} - 1}{w - 1} = u$$

$$\frac{w^{n+1} - 1}{w - 1} = 2w^n - 1 \text{ 式 6 より}$$

$$w^{n+1} - 1 = (w - 1)(2w^n - 1)$$

$$w^{n+1} - 1 = 2w^{w+1} - w - 2w^n + 1$$

$$w^{n+1} - w - 2w^n + 2 = 0$$

$$w(w^n - 1) - 2(w^n - 1) = 0$$

$$(w^n - 1)(w - 2) = 0$$

ゆえに、 $w^n = 1$ または $w = 2$ である。したがって、

$$(1 + u) = 2w^n$$

$$u = 2 \times 2^n - 1$$

$$u = 2^{n+1} - 1$$

よって、

$$a = (2^{n+1} - 1)2^n \tag{7}$$

u はメルセンヌ数であり、 a の形式の完全数をオイラー完全数という。

2.5.1 $1 + w + w^2 + w^3 + \dots + w^{n-1} + w^n$ について

$w > 2$ なら、 $1 + w + w^2 + w^3 + \dots + w^{n-1} + w^n$ が、 n が偶数の時、 w の項は偶数なので、 w の項の総和は偶数です。したがって、 $1 + w + w^2 + w^3 + \dots + w^{n-1} + w^n$ は、奇数になります。

$w > 2$ なら、 $1 + w + w^2 + w^3 + \dots + w^{n-1} + w^n$ が、 n が奇数の時、 w の項は奇数なので、 w の項の総和は奇数です。したがって、 $1 + w + w^2 + w^3 + \dots + w^{n-1} + w^n$ は、偶数になります。

$w = 2$ なら、 $1 + w + w^2 + w^3 + \dots + w^{n-1} + w^n$ が、 n が偶数でも奇数でも、 w の項の総和は偶数です。したがって、 $1 + w + w^2 + w^3 + \dots + w^{n-1} + w^n$ は、奇数になります。

以後、度々出てきますので覚えておいてください。

2.6 $a = uvw^n$

a を素因数分解したら $a = uvw^n$ であるとき、

$$(a) = (1+u)(1+v)(1+w+w^2+\cdots+w^n)$$

より、完全数であるには、

$$2a = (a)$$

$$2uvw^n = (1+u)(1+v)(1+w+w^2+\cdots+w^n) \quad (8)$$

である。 $(1+w+w^2+\cdots+w^n)$ は w で割り切れないので、 w^s の項を持たない。であるから、 $(1+u)(1+v)(1+w+w^2+\cdots+w^n)$ は、 $(1+u)$ と $(1+v)$ と $(1+w+w^2+\cdots+w^n)$ の3つに分けられるとすると、

$$(1+u) = 2vw^n \quad 1+u \text{ は偶数のため}$$

$$(1+v) = 2qu \quad 1+v \text{ は偶数のため}$$

とすると、 $(1+w+w^2+\cdots+w^n)$ に対応するものがない。 u, v を入れ替えても同じなので、 $(1+u)(1+v)(1+w+w^2+\cdots+w^n)$ は、 $(1+u)(1+v)$ と $(1+w+w^2+\cdots+w^n)$ に分けられる。ここで、 u, v, w はいずれも2でないとする。

2.6.1 u, v, w はいずれも2でないとき a が奇数

$$(1+u)(1+v) = 4qw^n \quad 1+u \text{ は偶数、} 1+v \text{ は偶数のため}$$

$$(1+w+w^2+\cdots+w^n) = uv \quad n \text{ は偶数のとき}$$

さて、

$$2uvw^n = (1+u)(1+v)(1+w+w^2+\cdots+w^n)$$

$$2uvw^n = 4quvw^n$$

$$1 = 2q$$

$$q = \frac{1}{2}$$

よって、

$$(1+u)(1+v) = 4qw^n$$

$$(1+u)(1+v) = 2w^n \quad (9)$$

また、 $(1+w+w^2+\cdots+w^n)$ が n は奇数のとき偶数である。 $(1+w+w^2+\cdots+w^n) = 2puv$ とおく。すると、式8より、 $2uvw^n = (1+u)(1+v)(1+w+w^2+\cdots+w^n)$ 右辺は全て偶数なので $8G$ とおく。 G は正の整数

$$2uvw^n = 8G$$

$$uvw^n = 4G$$

したがって、左辺は奇数なのでこれはありえない。

n が奇数の時 $(1 + w + w^2 + \cdots + w^n)$ は偶数なので

$$(1 + w + w^2 + \cdots + w^n) = uv$$

ところで、右辺が素数 uv の積なので、奇数であり、この式は成り立たない。

2.6.2 $u = 2$ のとき a が偶数

$u = 2$ のとき、式 8 より、

$$2uvw^n = (1 + u)(1 + v)(1 + w + w^2 + \cdots + w^n)$$

$$4vw^n = 3(1 + v)(1 + w + w^2 + \cdots + w^n)$$

左辺の v, w は素数なので、右辺の 3 も素数であるから $v = 3$ となる。これより、

$$12w^n = 12(1 + w + w^2 + \cdots + w^n)$$

$$w^n = (1 + w + w^2 + \cdots + w^n)$$

これは、成り立たない。なぜなら、等比級数の和の公式から

$$\frac{w^{n+1} - 1}{w - 1} = (1 + w + w^2 + \cdots + w^n)$$

よって、

$$\frac{w^{n+1} - 1}{w - 1} = w^n$$

$$w^{n+1} - 1 = (w - 1)w^n$$

$$w^{n+1} - 1 = w^{n+1} - w^n$$

$$1 = w^n$$

$w > 2$ であるから、 $u = 2$ でない。

以上から $a = uvw^n$ は完全数にならない。

2.7 $a = v^m w^n$

$a = v^m w^n$ のとき、

$$(a) = (1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^m)(1 + w + w^2 + w^3 + \cdots + w^n) \quad (10)$$

a が完全数ならば、 $2a = (a)$

$$2v^m w^n = (1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^m)(1 + w + w^2 + w^3 + \cdots + w^n) \quad (11)$$

である。

2.7.1 とともに偶数

$(1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^m)$ が偶数 よって v は 2 でない。

$(1 + w + w^2 + w^3 + \cdots + w^n)$ が偶数 よって w は 2 でない。

なら、式 11 は、

$$2v^m w^n = 4G$$

$$v^m w^n = 2G \quad \text{左辺は奇数、右辺は偶数}$$

でありえない。

2.7.2 いずれかが偶数で $v > 2, w > 2$

$(1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^m)$ が奇数あるいは偶数で

$(1 + w + w^2 + w^3 + \cdots + w^n)$ が偶数あるいは奇数なら

なら、式 11 は、

$$2v^m w^n = 2G$$

$$v^m w^n = G$$

式 11 より、

$$(1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^m) = 2w^n, w^m$$

$$(1 + w + w^2 + w^3 + \cdots + w^n) = v^m, 2v^m$$

である。

さて、

$$\frac{v^{m+1} - 1}{v - 1} = (1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^m) = 2w^n$$

$$\frac{w^{n+1} - 1}{w - 1} = (1 + w + w^2 + w^3 + \cdots + w^n) = v^m$$

から、

$$\frac{v^{m+1} - 1}{v - 1} = 2w^n$$

$$v^{m+1} - 1 = (v - 1)2w^n$$

$$v^{m+1} = (v - 1)2w^n + 1$$

$$v^m = \frac{(v - 1)2w^n + 1}{v}$$

より、

$$\frac{w^{n+1} - 1}{w - 1} = v^m$$

$$\frac{w^{n+1} - 1}{w - 1} = \frac{(v - 1)2w^n + 1}{v}$$

$$(w^{n+1} - 1)v = \{(v - 1)2w^n + 1\}(w - 1)$$

$$vw^{n+1} - v = \{2vw^n - 2w^n + 1\}(w - 1)$$

$$vw^{n+1} - v = \{2vw^{n+1} - 2w^{n+1} + w\} - \{2vw^n - 2w^n + 1\}$$

$$vw^{n+1} - v = 2vw^{n+1} - 2w^{n+1} + w - 2vw^n + 2w^n - 1$$

$$-v = vw^{n+1} - 2w^{n+1} + w - 2vw^n + 2w^n - 1$$

$$vw^{n+1} - 2w^{n+1} + w - 2vw^n + 2w^n - 1 + v = 0$$

$$w^{n+1}(v - 2) - 2w^n(v - 1) + (v - 1) + w = 0$$

$$w^{n+1}(v - 2) - (2w^n - 1)(v - 1) + w = 0$$

$$w^{n+1}(v - 1) - (2w^n - 1)(v - 1) - w^{n+1} + w = 0$$

$$(w^{n+1} - (2w^n - 1))(v - 1) - w^{n+1} + w = 0$$

$$(w^{n+1} - 2w^n + 1)(v - 1) - w(w^n - 1) = 0$$

$$(w^{n+1} - w^n - w^n + 1)(v - 1) - w(w^n - 1) = 0$$

$$(w(w^n - 1) - (w^n - 1))(v - 1) - w(w^n - 1) = 0$$

$$(w^n - 1)(w - 1)(v - 1) - w(w^n - 1) = 0$$

$$(w^n - 1)\{(w - 1)(v - 1) - w\} = 0$$

$w^n = 1$ ではないから、

$$(w - 1)(v - 1) - w = 0$$

$$(w - 1)(v - 1) = w$$

$$v - 1 = \frac{w}{w - 1}$$

$$v = \frac{w}{w - 1} + 1$$

ここで、 w は素数だから $\frac{w}{w-1}$ は整数でない。ところが左辺は整数なので、これは成り立たない。
 w, v を入れ替えても同じである。

2.7.3 いずれかが偶数で $v = 2, w > 2$

$(1 + v + v^2 + v^3 + \dots + v^m)$ が奇数

$(1 + w + w^2 + w^3 + \dots + w^n)$ が偶数

なら、式 11 は、

$$2 \times 2^m w^n = 2G$$

$$2^m w^n = G$$

ここで、 G が偶数であるとし、 $G = 2^p F$ とすると、

$$(1 + v + v^2 + v^3 + \dots + v^m) = \frac{v^{m+1} - 1}{v - 1}$$

ここで、 $v = 2$ から、

$$(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^m) = \frac{2^{m+1} - 1}{2 - 1}$$

$$(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^m) = 2^{m+1} - 1$$

なので、

$$2^{m+1} w^n = \{2^{m+1} - 1\} 2^p F$$

したがって、

$$2^{m+1} = 2^p$$

$$w^n = \{2^{m+1} - 1\} F$$

の 2 式が同時に成立しなければならない。

$$w^n = \{2^{m+1} - 1\} F$$

において、左辺は単一の素数の累乗であり、右辺が複数の素数の合成数であってはならない。となると、 $2^{m+1} - 1$ がメルセンヌ数であり、 F もそうでなければならない。であるから、

$$w^2 = \{2^{m+1} - 1\}^2$$

$$w = 2^{m+1} - 1$$

故に、

$$2^{m+1} w^2 = \{2^{m+1} - 1\} (1 + \{2^{m+1} - 1\} + \{2^{m+1} - 1\}^2)$$

$$2^{m+1} w^2 = w(1 + w + w^2)$$

$$2^{m+1} w = (1 + w + w^2)$$

w はメルセンヌ素数であるから、左辺偶数、右辺奇数で成り立たない。

2.7.4 いずれも奇数

$$(1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^m) \quad \text{奇数}$$

$$(1 + w + w^2 + w^3 + \cdots + w^n) \quad \text{奇数}$$

なら、式 11 は、

$$2v^m w^n = G$$

左辺偶数、右辺奇数で成り立たない。

以上から、 $a = v^m w^n$ のとき、 a は完全数でない。

3 奇数の完全数

これまで、 a が偶数の場合も考えてきましたが、いずれの場合でも、 a が奇数の場合は、完全数になりませんでした。これからは、 a が奇数の場合を前提とします。

3.1 $a = v^m w^n x^p y^q \dots$ a は奇数

$a = v^m w^n x^p y^q \dots$ a は奇数のとき、

$$(a) = (1+v+v^2+v^3+\dots+v^m)(1+w+w^2+w^3+\dots+w^n)(1+x+x^2+x^3+\dots+x^n)\dots \quad (12)$$

a が完全数ならば、 $2a = (a)$

$$2v^m w^n x^p y^q \dots = (1+v+v^2+v^3+\dots+v^m)(1+w+w^2+w^3+\dots+w^n)(1+x+x^2+x^3+\dots+x^n)\dots \quad (13)$$

である。 a が奇数なので、 v, w, x, y, \dots は 2 より大きいので、

$$(1+v+v^2+v^3+\dots+v^m)(1+w+w^2+w^3+\dots+w^n)(1+x+x^2+x^3+\dots+x^n)\dots$$

を構成する $(1+v+v^2+v^3+\dots+v^m)$ の様なものは、1 つだけが偶数であとはすべて奇数でなければならない。なぜなら、すべてが奇数なら式 13 の左辺偶数、右辺奇数で成り立たないし、2 つ以上偶数なら

$$\begin{aligned} 2v^m w^n &= 4G \quad \text{2 つが偶数として} \\ v^m w^n &= 2G \quad \text{左辺は奇数、右辺は偶数} \end{aligned}$$

でありえない。

以下に示すように、 $(1+v+v^2+v^3+\dots+v^m)$ が偶数の時、 $(1+v+v^2+v^3+\dots+v^m)$ は 2 以上の合成数に因数分解できる。また、 $(1+v+v^2+v^3+\dots+v^m)$ が奇数の時、 $(1+v+v^2+v^3+\dots+v^m)$ は 1 以上の合成数に因数分解できる。

よって、式 13 の左辺、右辺の素数の数が一致しないので、 a は完全数にならない。

3.1.1 $(1+v+v^2+v^3+\dots+v^m)$ が偶数の時

$(1+v+v^2+v^3+\dots+v^m)$ が偶数の時、 m は奇数である。

$m = 3$ の時、

$$1+v+v^2+v^3 = 1+v+v^2(1+v) = (1+v)(1+v^2)$$

よって、2 つの合成数の積である。

$m = 5$ の時、

$$1+v+v^2+v^3+v^4+v^5 = 1+v+v^2(1+v)+v^4(1+v) = (1+v)(1+v^2+v^4) = (1+v)(v^2-v+1)(v^2+v+1)$$

よって、3 つの合成数の積である。

$m = 7$ の時、

$$\begin{aligned} 1 + v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5 + v^6 + v^7 &= 1 + v + v^2(1 + v) + v^4(1 + v) + v^6(1 + v) \\ &= (1 + v)(1 + v^2 + v^4 + v^6) = (1 + v)\{1 + v^2 + v^4(1 + v^2)\} = (1 + v)(1 + v^2)(1 + v^4) \end{aligned}$$

よって、3つの合成数の積である。

$m = 9$ の時、

$$\begin{aligned} 1 + v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5 + v^6 + v^7 + v^8 + v^9 &= 1 + v + v^2(1 + v) + v^4(1 + v) + v^6(1 + v) + v^8(1 + v) \\ &= (1 + v)(1 + v^2 + v^4 + v^6 + v^8) = (1 + v)(v^4 - v^3 + v^2 - v + 1)(v^4 + v^3 + v^2 + v + 1) \end{aligned}$$

よって、3つの合成数の積である。

$m = 11$ の時、

$$\begin{aligned} 1 + v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5 + v^6 + v^7 + v^8 + v^9 + v^{10} + v^{11} &= 1 + v + v^2(1 + v) + v^4(1 + v) + v^6(1 + v) + v^8(1 + v) + v^{10}(1 + v) \\ &= (1 + v)(1 + v^2 + v^4 + v^6 + v^8 + v^{10}) = (1 + v)\{1 + v^2 + v^4(1 + v^2) + v^8(1 + v^2)\} = (1 + v)(1 + v^2)(1 + v^4 + v^8) \end{aligned}$$

ここで、 $V = v^2$ とおくと $1 + v^4 + v^8 = 1 + V^2 + V^4$ これは $m = 5$ の時より、

$$1 + v^4 + v^8 = 1 + V^2 + V^4 = (V^2 - V + 1)(V^2 + v + 1) = (v^4 - v^2 + 1)(v^4 + v^2 + 1) = (v^4 - v^2 + 1)(v^2 - v + 1)(v^2 + v + 1)$$

よって、

$$1 + v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5 + v^6 + v^7 + v^8 + v^9 + v^{10} + v^{11} = (1 + v)(1 + v^2)(v^4 - v^2 + 1)(v^2 - v + 1)(v^2 + v + 1)$$

よって、5つの合成数の積である。

$m = 13$ の時、

$$\begin{aligned} 1 + v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5 + v^6 + v^7 + v^8 + v^9 + v^{10} + v^{11} + v^{12} + v^{13} &= (1 + v)(1 + v^2 + v^4 + v^6 + v^8 + v^{10} + v^{12}) \\ &= (1 + v)(v^6 - v^5 + v^4 - v^3 + v^2 - v + 1)(v^6 + v^5 + v^4 + v^3 + v^2 + v + 1) \end{aligned}$$

よって、3つの合成数の積である。

$m = 15$ の時、

$$\begin{aligned} 1 + v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5 + v^6 + v^7 + v^8 + v^9 + v^{10} + v^{11} + v^{12} + v^{13} + v^{14} + v^{15} &= (1 + v)(1 + v^2 + v^4 + v^6 + v^8 + v^{10} + v^{12} + v^{14}) \\ &= (1 + v)\{1 + v^2 + v^4(1 + v^2) + v^8(1 + v^2) + v^{12}(1 + v^2)\} = (1 + v)(1 + v^2)(1 + v^4 + v^8 + v^{12}) \\ &= (1 + v)(1 + v^2)(1 + v^4 + v^8 + v^{12}) = (1 + v)(1 + v^2)\{1 + v^4 + v^8(1 + v^4)\} = (1 + v)(1 + v^2)(1 + v^4)(1 + v^8) \end{aligned}$$

よって、4つの合成数の積である。

$m = 17$ の時、

$$\begin{aligned} 1 + v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5 + v^6 + v^7 + v^8 + v^9 + v^{10} + v^{11} + v^{12} + v^{13} + v^{14} + v^{15} + v^{16} + v^{17} &= (1 + v)(1 + v^2 + v^4 + v^6 + v^8 + v^{10} + v^{12} + v^{14} + v^{16}) \\ &= (1 + v)(1 + v^2 + v^4 + v^6 + v^8 + v^{10} + v^{12} + v^{14} + v^{16}) = (1 + v)\{1 + v^2 + v^4 + v^6(1 + v^2 + v^4) + v^{12}(1 + v^2 + v^4)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1+v)\{1+v^2+v^4+v^6(1+v^2+v^4)+v^{12}(1+v^2+v^4)\} = (1+v)(1+v^2+v^4)(1+v^6+v^{12}) \\
&= (1+v)(1+v^2+v^4)(1+v^6+v^{12}) = (1+v)(v^2-v+1)(v^2+v+1)(v^6-v^3+1)(v^6+v^3+1)
\end{aligned}$$

よって、5つの合成数の積である。

以下省略。このように、 $(1+v+v^2+v^3+\dots+v^m)$ が偶数の時、 $(1+v+v^2+v^3+\dots+v^m)$ は2以上の合成数に因数分解できる。

3.1.2 $(1+v+v^2+v^3+\dots+v^m)$ が奇数の時

$(1+v+v^2+v^3+\dots+v^m)$ が奇数の時、 m は偶数である。

$m=2$ の時、

$$1+v+v^2$$

よって、1つの合成数の積である。

$m=4$ の時、

$$1+v+v^2+v^3+v^4$$

よって、1つの合成数の積である。

$m=6$ の時、

$$1+v+v^2+v^3+v^4+v^5+v^6$$

よって、1つの合成数の積である。

$m=4$ の時、

$$1+v+v^2+v^3+v^4+v^5+v^6+v^7+v^8 = 1+v+v^2+v^3(1+v+v^2)+v^6(1+v+v^2) = (1+v+v^2)(1+v^3+v^6)$$

よって、2つの合成数の積である。

$m=6$ の時、

$$1+v+v^2+v^3+v^4+v^5+v^6+v^7+v^8+v^9+v^{10}$$

よって、1つの合成数の積である。

$m=8$ の時、

$$1+v+v^2+v^3+v^4+v^5+v^6+v^7+v^8+v^9+v^{10}+v^{11}+v^{12}$$

よって、1つの合成数の積である。

$m=10$ の時、

$$\begin{aligned}
1+v+v^2+v^3+v^4+v^5+v^6+v^7+v^8+v^9+v^{10}+v^{11}+v^{12}+v^{13}+v^{14} &= (1+v+v^2)(1+v^3+v^6+v^9+v^{12}) \\
&= (1+v+v^2)(1+v^3+v^6+v^9+v^{12}) = (1+v+v^2)(v^4+v^3+v^2+v+1)(v^8-v^7+v^5-v^4+v^3-v+1)
\end{aligned}$$

よって、3つの合成数の積である。

$m=12$ の時、

$$1+v+v^2+v^3+v^4+v^5+v^6+v^7+v^8+v^9+v^{10}+v^{11}+v^{12}+v^{13}+v^{14}+v^{15}+v^{16}$$

よって、1つの合成数の積である。

$m = 14$ の時、

$$1 + v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5 + v^6 + v^7 + v^8 + v^9 + v^{10} + v^{11} + v^{12} + v^{13} + v^{14} + v^{15} + v^{16} + v^{17} + v^{18}$$

よって、1つの合成数の積である。

以下省略。このように、 $(1 + v + v^2 + v^3 + \dots + v^m)$ が奇数の時、 $(1 + v + v^2 + v^3 + \dots + v^m)$ は1以上の合成数に因数分解できる。

3.1.3 $(1 + v + v^2 + v^3 + \dots + v^m)$ が奇数の時と偶数の時の詳細検討

$(1 + v + v^2 + v^3 + \dots + v^m)$ は、 v 進数の1が $m + 1$ 個並んだ数を10進数に変換する式である。そこで、1が並んだ数 $11111 \dots 1$ は、1の数が合成数の場合、その合成数の素因数分解したたとえば、素数 k で1が並んだ数を区切り分けることができる。つまり、1が並んだ数 $11111 \dots 1$ つまり、 $(1 + v + v^2 + v^3 + \dots + v^m)$ は、その素数 k 分1が並んだ数、 $(1 + v + v^2 + v^3 + \dots + v^{k-1})$ で因数分解できる。たとえば、1が15並んだ場合 $15 = 3 \times 5$ であるので

$$111111111111111 = (11111)(10000100001)$$

とすることができ、つまりこれは、

$$1 + v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5 + v^6 + v^7 + v^8 + v^9 + v^{10} + v^{11} + v^{12} + v^{13} + v^{14} = (1 + v + v^2 + v^3 + v^4)(1 + v^5 + v^{10})$$

となる。同様に、

$$111111111111111 = (111)(1001001001001)$$

とすることができ、つまりこれは、

$$1 + v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5 + v^6 + v^7 + v^8 + v^9 + v^{10} + v^{11} + v^{12} + v^{13} + v^{14} = (1 + v + v^2)(1 + v^3 + v^6 + v^9 + v^{12})$$

となる。つまり、最低2つの合成数である。したがって、1が並んだ数 $11111 \dots 1$ の1の数がいくつの合成数かで合成数は最低いくつから構成されるかを予測できる。1が並んだ数 $11111 \dots 1$ の1の数が素数であるときだけ最低合成数が1つである。ゆえに、1の数が偶数ならば、最低合成数が2つ以上である。

3.2 本当に式13の左辺、右辺の素数の数が一致しないか

さて、式13の左辺の素数の数より、右辺の合成数の数は多いことは言えたが、なぜなら、必ず1個は右辺は1の数が偶数をふくむのでそうなるが、そのすべての合成数を素因数分解して整理したならば、たまたま左辺、右辺の素数の数が一致することはありえないかという疑問が残る。そこで、 $(1 + v + v^2 + v^3 + \dots + v^m)$ の v は素数なので、素数候補式 $Qn + p$ を v に代入した時を考える。 $v = Qn + p$ において、 $Q \bmod r = 0$ のとき、 p は r で割れない。 Q は素数 R より小さい全て

の素数の積であり、 r は Q を構成する素数のいくつかからなる合成数である。また、 p は Q を構成する素数のすべてで割れないとする。ここで、

$$1 + v + v^2 + v^3 + \dots + v^m = rf(v)$$

であるならば、

$$1 + p + p^2 + p^3 + \dots + p^m = rg(p)$$

でなければならない。

補足しておく、ここで、二項定理に注目すると、

$$(ax + b)^n = {}_n C_0 a^n x^n + {}_n C_1 a^{n-1} x^{n-1} b + {}_n C_2 a^{n-2} x^{n-2} b^2 + \dots + {}_n C_r a^{n-r} x^{n-r} b^r + \dots + b^n$$

$$(ax + b)^n = a \{ {}_n C_0 a^{n-1} x^n + {}_n C_1 a^{n-2} x^{n-1} b + {}_n C_2 a^{n-3} x^{n-2} b^2 + \dots + {}_n C_r a^{n-r-1} x^{n-r} b^r + \dots \} + b^n$$

となるから、 $v = Qn + p$ を $(1 + v + v^2 + v^3 + \dots + v^m)$ に代入すると、例えば、

$$1 = 1$$

$$v = Qn + p$$

$$v^2 = (Qn + p)^2 = Q^2 n^2 + 2Qnp + p^2 = Q(Qn^2 + np) + p^2$$

$$v^3 = (Qn + p)^3 = Q^3 n^3 + 3Q^2 n^2 p + 3Qnp^2 + p^3 = Q(Q^2 n^3 + 3Qn^2 p + 3np^2) + p^3$$

よって、これらの式を上から足すと

$$1 + v + v^2 + v^3 = Qh(n) + 1 + p + p^2 + p^3$$

ただし、

$$Qh(n) = Qn + Q(Qn^2 + np) + Q(Q^2 n^3 + 3Qn^2 p + 3np^2)$$

$$Qh(n) = Q\{n + (Qn^2 + np) + (Q^2 n^3 + 3Qn^2 p + 3np^2)\}$$

さて、 Q は R 以下のすべての素数の積で r は Q の一部であるから $Q = rS$ である。よって、 $Qh(n)$ は r で割れる。であるから、 $1 + p + p^2 + p^3$ が r で割れれば、 $1 + v + v^2 + v^3$ は r で割れる。

等比級数の和の公式より

$$1 + p + p^2 + p^3 + \dots + p^m = \frac{p^{m+1} - 1}{p - 1}$$

よって、

$$rg(p) = \frac{p^{m+1} - 1}{p - 1}$$

したがって、 $\frac{p^{m+1} - 1}{p - 1}$ が r で割れれば、

$$1 + v + v^2 + v^3 + \dots + v^m = rf(v)$$

がなりたつ。したがって、 (v^m) は、 $rf(v)$ と表せるかは $\frac{p^{m+1}-1}{p-1}$ が r で割れるかで決められる。つまり、 (v^m) の素因数分解は r を構成する素数があるかないかであり、 $\frac{p^{m+1}-1}{p-1}$ が r で割れるかでその素因数分解は予測できる。式 13 の $v, w, x, y \dots$ は $v < w < x < y < \dots$ の素数である。

たとえば、2, 3, 5 を除いた素数候補式 $v = 30n + 7$ の場合以下のようなになる。ただし Q を構成する素数はそれぞれ 1 個だけなので r も r を構成する素数はそれぞれ 1 個だけであることを注意する。つまり、累乗はない。

```
(%i1) v:30*n+7;
(%o1) 30 n + 7
(%i2) factor(1+v);
(%o2) 2 (15 n + 4)
(%i3) factor((7^2-1)/(7-1));
(%o3) 2 3
(%i4) factor(1+v+v^2);
(%o4) 2 3 (300 n + 150 n + 19)
(%i5) factor((7^3-1)/(7-1));
(%o5) 3 19
(%i6) factor(1+v+v^2+v^3);
(%o6) 2 20 (15 n + 4) (90 n + 42 n + 5)
(%i7) factor((7^4-1)/(7-1));
(%o7) 2 4 2 5
(%i8) factor(1+v+v^2+v^3+v^4);
(%o8) 4 3 2 81000 n + 783000 n + 284400 n + 46020 n + 2801
(%i9) factor((7^5-1)/(7-1));
(%o9) 2801
(%i10) factor(1+v+v^2+v^3+v^4+v^5);
(%o10) 2 2 6 (15 n + 4) (300 n + 150 n + 19) (900 n + 390 n + 43)
(%i11) factor((7^6-1)/(7-1));
(%o11) 2 3 3 19 43
(%i12) factor(1+v+v^2+v^3+v^4+v^5+v^6);
(%o12) 6 5 4 3 2 729000000 n + 1044900000 n + 624510000 n + 199233000 n + 35784900 n + 3431430 n + 137257
(%i13) factor((7^7-1)/(7-1));
(%o13) 29 4733
(%i14) factor(1+v+v^2+v^3+v^4+v^5+v^6+v^7);
(%o14) 2 4 3 2 40 (15 n + 4) (90 n + 42 n + 5) (405000 n + 378000 n + 132300 n + 20580 n + 1201)
```

```
(%i15) factor((7^8-1)/(7-1));
(%o15)                5 2
                    2 5 1201
```

3.2.1 素数候補式 Q_{n+p}

自然数は $2n, 2n+1$ とあわせ、また、 $3n, 3n+1, 3n+2$ とあわせる。 $2n, 3n$ は 2 と 3 の倍数である。そこで、もっとわかりやすく $6n, 6n+1, 6n+2, 6n+3, 6n+4, 6n+5$ とかくと $6n, 6n+2, 6n+4$ は 2 の倍数 $6n, 6n+3$ は 3 の倍数であるから、2 の倍数でも 3 の倍数でもないものは $6n+1, 6n+5$ となる。これを 2, 3 の倍数を除いた素数候補式という。同様にして、2, 3, 5 を除いた素数候補式は、 $30n+1, 30n+7, 30n+11, 30n+13, 30n+17, 30n+19, 30n+23, 30n+29$ である。

3.3 $a = bv^mw^nx^p \dots$ a は奇数

この場合、

$$(a) = (1+b)(1+v+v^2+v^3+\dots+v^m)(1+w+w^2+w^3+\dots+w^n)(1+x+x^2+x^3+\dots+x^n)\dots \quad (14)$$

a が完全数ならば、 $2a = (a)$

$$2bv^mw^nx^p \dots = (1+b)(1+v+v^2+v^3+\dots+v^m)(1+w+w^2+w^3+\dots+w^n)(1+x+x^2+x^3+\dots+x^n)\dots \quad (15)$$

である。 $1+b$ は偶数であり、 a が奇数であるから、

$$(1+v+v^2+v^3+\dots+v^m)(1+w+w^2+w^3+\dots+w^n)(1+x+x^2+x^3+\dots+x^n)\dots$$

はすべて奇数でなければならない。したがって、 $a = uv^m$ を代表にできる。しかし、この場合 a が奇数なら完全数にならないので、 $a = bv^mw^nx^p \dots$ は完全数にならない。

3.4 $a = bcv^mw^nx^p \dots$ a は奇数

この場合、

$$(a) = (1+b)(1+c)(1+v+v^2+v^3+\dots+v^m)(1+w+w^2+w^3+\dots+w^n)(1+x+x^2+x^3+\dots+x^n) \dots \quad (16)$$

a が完全数ならば、 $2a = (a)$

$$2bcv^mw^nx^p \dots = (1+b)(1+c)(1+v+v^2+v^3+\dots+v^m)(1+w+w^2+w^3+\dots+w^n)(1+x+x^2+x^3+\dots+x^n) \dots \quad (17)$$

である。 a が奇数なので $1+b, 1+c$ がともに偶数であり、それ以外がすべて奇数だとしても、右辺は 4 の倍数であり、左辺は 2 の倍数より成り立たない。

したがって、 a は完全数にならない。

3.5 $a = bcd \cdots v^m w^n x^p \cdots$ a は奇数

この場合、

$$(a) = (1+b)(1+c)(1+d) \cdots (1+v+v^2+v^3+\cdots+v^m)(1+w+w^2+w^3+\cdots+w^n)(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n) \cdots \quad (18)$$

a が完全数ならば、 $2a = (a)$

$$2bcd \cdots v^m w^n x^p \cdots = (1+b)(1+c)(1+d) \cdots (1+v+v^2+v^3+\cdots+v^m)(1+w+w^2+w^3+\cdots+w^n)(1+x+x^2+x^3+\cdots) \cdots \quad (19)$$

である。これは、 $a = uvw$ の a が奇数の場合と同じである。したがって、 $a = bcd \cdots v^m w^n x^p \cdots$ は完全数にならない。

よって、奇数の完全数はありえない。

4 偶数の完全数

4.1 $a = 2^l v^m w^n x^p y^q \dots$ a は偶数

$a = 2^l v^m w^n x^p y^q \dots$ a は偶数のとき、

$$(a) = (1+2+2^2+2^3+\dots+2^l)(1+v+v^2+v^3+\dots+v^m)(1+w+w^2+w^3+\dots+w^n)(1+x+x^2+x^3+\dots+x^n)\dots \quad (20)$$

a が完全数ならば、 $2a = (a)$

$$2^{l+1} v^m w^n x^p y^q \dots = (1+2+2^2+2^3+\dots+2^{l+1})(1+v+v^2+v^3+\dots+v^m)(1+w+w^2+w^3+\dots+w^n)(1+x+x^2+x^3+\dots+x^n)\dots \quad (21)$$

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{l+1} = \frac{2^{l+2} - 1}{2 - 1} = 2^{l+2} - 1$$

となり、奇数の合成数である。 a が偶数なので、 v, w, x, y, \dots は 2 より大きいので、

$$(1 + v + v^2 + v^3 + \dots + v^m)(1 + w + w^2 + w^3 + \dots + w^n)(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n)\dots$$

を構成する $(1 + v + v^2 + v^3 + \dots + v^m)$ の様なものは、 2^{l+1} となるようにいくつかは偶数であとはすべて奇数でなければならない。

ところで $(1 + v + v^2 + v^3 + \dots + v^m)$ が偶数の時、 $(1 + v + v^2 + v^3 + \dots + v^m)$ は 2 以上の合成数に因数分解でき、また、 $(1 + v + v^2 + v^3 + \dots + v^m)$ が奇数の時、 $(1 + v + v^2 + v^3 + \dots + v^m)$ は 1 以上の合成数に因数分解できる。

もし仮に、 2^{l+1} も含めて、それらの合成数がすべて素数だとしても、式 20 の左辺、右辺の素数の数が一致しないので、 a は完全数にならない。

4.2 $a = 2^l b v^m w^n x^p \dots$ a は偶数

この場合、

$$(a) = (1+b)(1+2+2^2+2^3+\dots+2^l)(1+v+v^2+v^3+\dots+v^m)(1+w+w^2+w^3+\dots+w^n)(1+x+x^2+x^3+\dots+x^n) \dots \quad (22)$$

a が完全数ならば、 $2a = (a)$

$$2^{l+1} b v^m w^n x^p \dots = (1+b)(1+2+2^2+2^3+\dots+2^l)(1+v+v^2+v^3+\dots+v^m)(1+w+w^2+w^3+\dots+w^n)(1+x+x^2+x^3+\dots+x^n) \dots \quad (23)$$

である。 b は 2 より大きな素数であるので、 $1+b$ は偶数である。

4.2.1 $1+b = 2^{l+1}$ のメルセンヌ数の時

$1+b = 2^{l+1}$ の時、

$$1+b = 2^{l+1}$$

$$b = 2^{l+1} - 1$$

より、 b は素数であるから、メルセンヌ数となる。とすると、

$$(1+v+v^2+v^3+\dots+v^m)(1+w+w^2+w^3+\dots+w^n)(1+x+x^2+x^3+\dots+x^n) \dots$$

の $1+v+v^2+v^3+\dots+v^m$ のようなものは、すべて奇数でなければならない。

すると、1 以上の合成数であるから、もし仮に、 2^{l+1} も含めて、それらの合成数がすべて素数だとしても、式 23 の左辺、右辺の素数の数が一致しないので、 a は完全数にならない。

4.2.2 $1+b = 2^k$ のメルセンヌ数の時 $k < l$ とする

$1+b = 2^k$ $k < l$ とする がメルセンヌ数の時、 2^{l+1-k} の項が残る。この場合、

$$(1+v+v^2+v^3+\dots+v^m)(1+w+w^2+w^3+\dots+w^n)(1+x+x^2+x^3+\dots+x^n) \dots$$

の $1+v+v^2+v^3+\dots+v^m$ のようなものは、いくつかは偶数でいくつかは奇数でなければならない。

すると、偶数は 2 以上の合成数、奇数は 1 以上の合成数であるから、もし仮に、 2^{l+1} も含めて、それらの合成数がすべて素数だとしても、式 23 の左辺、右辺の素数の数が一致しないので、 a は完全数にならない。

4.2.3 $1+b$ がメルセンヌ数でない時

$1+b$ は偶数であるから、

$$1+b = 2B$$

とおける。 B は合成数である。

$$(1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^m)(1 + w + w^2 + w^3 + \cdots + w^n)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n) \cdots$$

の $1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^m$ のようなものは、いくつかは偶数でいくつかは奇数でなければならない。

すると、偶数は 2 以上の合成数、奇数は 1 以上の合成数であるから、もし仮に、 B 、 2^{l+1} も含めて、それらの合成数がすべて素数だとしても、式 23 の左辺、右辺の素数の数が一致しないので、 a は完全数にならない。

5 あとがき

さて、私は、怠け者で、数学が苦手な、やっとならぬまで来たわけですが、かの人の遺産を全部引き継いであげたのでしょうか？

若干の不安がありますが、・・・