

リーマンのゼータ関数は間違いである

愛犬ベルのために

最新 2023 年 3 月 25 日

更新履歴

初版 2023 年 3 月 25 日

オイラー積は間違いであることを証明し、リーマンのゼータ関数が間違いであることを証明する。

1 オイラー積

オイラー積は、すべての素数において

$$1 = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right)\left(1 - \frac{1}{7^2}\right)\left(1 - \frac{1}{11^2}\right)\left(1 - \frac{1}{13^2}\right) \cdots \zeta(2)$$

が成り立ち、これを变形して、

$$1 = \frac{(2^2 - 1)}{2^2} \frac{(3^2 - 1)}{3^2} \frac{(5^2 - 1)}{5^2} \frac{(7^2 - 1)}{7^2} \frac{(11^2 - 1)}{11^2} \frac{(13^2 - 1)}{13^2} \cdots \zeta(2)$$

更に、公式より $b^2 - 1 = (b + 1)(b - 1)$ ですから、

$$1 = \frac{(2 + 1)(2 - 1)}{2^2} \frac{(3 + 1)(3 - 1)}{3^2} \frac{(5 + 1)(5 - 1)}{5^2} \frac{(7 + 1)(7 - 1)}{7^2} \frac{(11 + 1)(11 - 1)}{11^2} \frac{(13 + 1)(13 - 1)}{13^2} \cdots \zeta(2)$$

分母を左辺に集めて、

$$2^2 3^2 5^2 7^2 11^2 13^2 \cdots = (2 + 1)(2 - 1)(3 + 1)(3 - 1)(5 + 1)(5 - 1)(7 + 1)(7 - 1)(11 + 1)(11 - 1)(13 + 1)(13 - 1) \cdots \zeta(2)$$

ここで、左辺は 2 の指数は 2 で、右辺は $(2 + 1)(2 - 1)$ を除いてすべて偶数であり 2 の指数は 2 以外の素数の数の倍ですね。一方、バゼル問題から、オイラーにより、 $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ ですから、左辺と右辺の 2 の指数は明らかに違うので、この等式はなりたちませんね。つまり、オイラー積は間違いです。

2 リーマンのゼータ関数

リーマンのゼータ関数は、オイラー積を元にしています。リーマンのゼータ関数のオイラー積表示から、

$$1 = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\left(1 - \frac{1}{5^s}\right)\left(1 - \frac{1}{7^s}\right)\left(1 - \frac{1}{11^s}\right)\left(1 - \frac{1}{13^s}\right) \cdots \zeta(s)$$

が成り立ち、これを变形して、

$$1 = \frac{(2^s - 1)}{2^s} \frac{(3^s - 1)}{3^s} \frac{(5^s - 1)}{5^s} \frac{(7^s - 1)}{7^s} \frac{(11^s - 1)}{11^s} \frac{(13^s - 1)}{13^s} \cdots \zeta(s)$$

また、公式

$$a^n - 1 = (a - 1)\{a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + a^{n-4} + \cdots + a^2 + a + 1\}$$

より、

$$A = a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + a^{n-4} + \cdots + a^2 + a + 1$$

とすると、

$$a^n - 1 = (a - 1)A$$

より、

$$1 = \frac{(2-1)A_2}{2^s} \frac{(3-1)A_3}{3^s} \frac{(5-1)A_5}{5^s} \frac{(7-1)A_7}{7^s} \frac{(11-1)A_{11}}{11^s} \frac{(13-1)A_{13}}{13^s} \cdots \zeta(s)$$

分母を左辺に集めて、

$$2^s 3^s 5^s 7^s 11^s 13^s \cdots = (2-1)A_2(3-1)A_3(5-1)A_5(7-1)A_7(11-1)A_{11}(13-1)A_{13} \cdots \zeta(s)$$

ここで、左辺の2の指数は s で、右辺は2以外の素数の数だけある(素数-1)はすべて偶数なので、たくさんの偶数の積ですし、また $\zeta(s)$ は、2の負のべき乗ではないので、左辺と右辺の2の指数は明らかに違うので、この等式はなりたちませんね。つまり、リーマンのゼータ関数は間違いです。