

フェルマーの最終定理の初等的証明

愛犬ベルのために

最新 2022 年 6 月 29 日

更新履歴

初版 2022 年 6 月 26 日

第一版 2022 年 6 月 27 日 $x + j \neq x - k$ 追加

第二版 2022 年 6 月 29 日 表現修正

1 はじめに

フェルマーの最終定理について初等的証明について考えてみようと思います。

$$a^n + b^n = c^n \quad (a, b, c \text{ は互いに素な自然数 } \quad n \text{ は } 3 \text{ 以上の自然数}) \quad (1)$$

これが、成り立たないというものです。

1.1 補足

$F(x) - G(x) = 0$ のとき、 $F(w) = 0$ (ただし、 w は自然数) なら、

$$F(x) = (x - w)f(x)$$

また、

$$G(x) = (x - w)g(x)$$

つまり、 $F(x), G(x)$ は共通の因数式 $(x - w)$ を持つならば、

$$F(x) - G(x) = (x - w)f(x) - (x - w)g(x)$$

$$F(x) - G(x) = (x - w)\{f(x) - g(x)\}$$

ここで、 $x = w$ ならば、

$$F(w) - G(w) = (w - w)\{f(w) - g(w)\} = 0$$

しかし、

$$G(x) = (x - v)g(x)$$

つまり、 $F(x), G(x)$ は共通の因数式を持たなければ、

$$F(x) - G(x) = (x - w)f(x) - (x - v)g(x)$$

ここで、 $x = w$ であっても、

$$F(w) - G(w) = (w - w)f(w) - (w - v)g(w) = -(w - v)g(w)$$

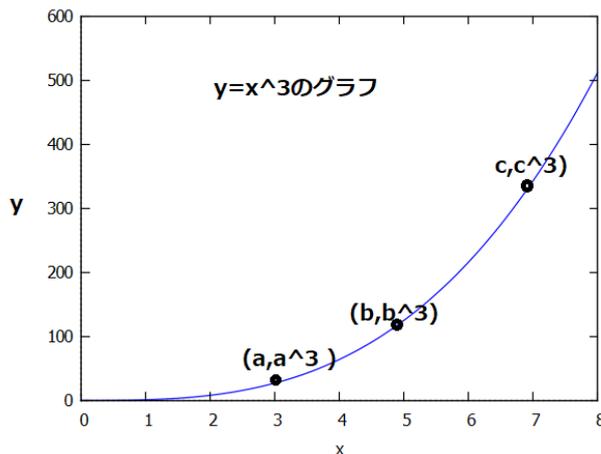
であり、

$$F(w) - G(w) \neq 0$$

である。

1.2 $F(x) = x^n$

式 (1) は、 $n = 3$ の場合グラフにすると、下の図になります。つまり、 $y = x^3$ のグラフ上の 3 点 $(a, a^3), (b, b^3), (c, c^3)$ の関係です。



$F(c) - F(b) - F(a) = 0$ となります。

2 証明

$a = x, b = x + j, c = x + j + k$ (ただし j, k は自然数) とすると、

$$F(c) - F(b) - F(a) = 0$$

$$(x + j + k)^n - (x + j)^n - x^n = 0$$

となります。

さて、 $(x + j + k)^n - (x + j)^n - k^n$ を考えてみましょう。

$x = -j$ とすると、

$$(x + j + k)^n - (x + j)^n - k^n = (-j + j + k)^n - (-j + j)^n - k^n$$

$$(x + j + k)^n - (x + j)^n - k^n = k^n - k^n = 0$$

したがって、

$$(x + j + k)^n - (x + j)^n - k^n = (x + j)h(x)$$

となり、因数式として $x + j$ を持ちます。したがって、

$$\begin{aligned} (x + j + k)^n - (x + j)^n - x^n &= 0 \\ (x + j + k)^n - (x + j)^n - k^n - (x^n - k^n) &= 0 \\ (x + j)h(x) - (x^n - k^n) &= 0 \end{aligned}$$

$(x + j + k)^n - (x + j)^n - k^n$ は因数式として $x + j$ を持ち、 $x^n - k^n$ は因数式として $x - k$ を持ちます。

$$(x + j)h(x) - (x - k)g(x) = 0$$

2.1 $x + j = x - k$

ここで、因数式 $x + j = x - k$ ならば、

$$(x - k)h(x) - (x - k)g(x) = 0$$

因数式 $x - k$ を共通に持つので、

$$(x - k)\{h(x) - g(x)\} = 0$$

ここで、 $x = k$ ならば、この式は正しい。したがって、

$$\begin{aligned} (x + j + k)^n - (x + j)^n - x^n &= 0 \\ c^n - b^n &= a^n \end{aligned}$$

となります。しかし、 $x + j = x - k$ ならば、 $j + k = 0$ なので、 $a = x, b = x + j, c = x + j + k$ (ただし j, k は自然数) より、 $a = c$ となります。

$$c^n - b^n = a^n$$

$$a^n - b^n = a^n$$

$$a^n - a^n = b^n$$

$$b^n = 0$$

$$b = 0$$

となり、 $a = c, b = 0$ では、 a, b, c は互いに素な自然数に矛盾するので、式 (1) は、成り立ちません。

2.2 $x + j \neq x - k$

$$(x + j + k)^n - (x + j)^n - x^n = 0$$

$$(x + j + k)^n - (x + j)^n - k^n - (x^n - k^n) = 0$$

$$(x + j)h(x) - (x^n - k^n) = 0$$

$$(x + j)h(x) - (x - k)g(x) = 0$$

において、 $x + j \neq x - k$ ならば、

$$(x + j)h(x) - (x - k)g(x) \neq 0$$

したがって、

$$(x + j + k)^n - (x + j)^n - x^n \neq 0$$

つまり、

$$c^n - b^n \neq a^n$$

よって、式 (1) は、成り立ちません。

以上から、フェルマーの最終定理の初等的証明ができた。