

# フェルマーの最終定理の初等的証明

うんざりはちべえ

最新第二版 2023年3月12日

## はじめに

更新履歴

2023.3.11 新規作成

2023.3.11 第一版

2023.3.12 第二版

## フェルマーの最終定理

$a^n + b^n = c^n$  が成り立つ互いに素な自然数  $a, b, c$  が存在すると仮定する。ただし、 $n \geq 3$  とする。

背理法を用いる。

### 1 フェルマーの最終定理の初等的証明

さて、公式より、

$$c^n - b^n = (c - b)\{c^{n-1} + c^{n-2}b + c^{n-3}b^2 + c^{n-4}b^3 + \dots + cb^{n-2} + b^{n-1}\}$$

また、 $c^n - b^n = a^n$  よって、

$$a^n = (c - b)\{c^{n-1} + c^{n-2}b + c^{n-3}b^2 + c^{n-4}b^3 + \dots + cb^{n-2} + b^{n-1}\} \dots (a)$$

ここで、 $\{ \}$  の中は、初項  $c^{n-1}$ 、項比  $\frac{b}{c}$ 、項数  $n$  の等比級数である。

$$a^n = (c - b)c^{n-1}\{1 + \left(\frac{b}{c}\right) + \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^3 + \dots + \left(\frac{b}{c}\right)^{n-2} + \left(\frac{b}{c}\right)^{n-1}\} \dots (b)$$

(b) 式の両辺を  $a^t$  で割ると、 $a, c$  は互いに素であるから、(b) 式の右辺の  $c^{n-1}$  は  $a^t$  は割り切れない。ただし、 $t$  は  $t < n$  の自然数である。

ゆえに、右辺の  $c^{n-1}$  を除いた式は  $a^t$  の倍数でなければならない。

$$pa^t = (c-b)\left\{1 + \left(\frac{b}{c}\right) + \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{b}{c}\right)^{n-2} + \left(\frac{b}{c}\right)^{n-1}\right\} - \cdots - (c)$$

でなければならない。ところで、等比級数の和の公式から、 $\{\}$  の中は、

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{b}{c}\right)^n - 1}{\left(\frac{b}{c}\right) - 1} &= \frac{\left(\frac{b}{c}\right)^n - 1}{\frac{b-c}{c}} \\ &= c \frac{\left(\frac{b^n}{c^n}\right) - 1}{b-c} \\ &= c \frac{\frac{b^n - c^n}{c^n}}{b-c} \\ &= \frac{b^n - c^n}{c^{n-1}(b-c)} \end{aligned}$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} pa^t &= (c-b)\left\{\frac{b^n - c^n}{c^{n-1}(b-c)}\right\} \\ pa^t &= \frac{c^n - b^n}{c^{n-1}} \\ pa^t c^{n-1} &= c^n - b^n \\ pa^t &= c - \frac{b^n}{c^{n-1}} \end{aligned}$$

右辺は、 $b, c$  が互いに素であるから、 $\frac{b^n}{c^{n-1}}$  は、割り切れない。したがって、左辺の  $pa^t$  は自然数であるが、右辺は自然数でない。よって、 $(c)$  は、成り立たない。つまり、 $a^t$  の倍数にはなれない。

すると、 $(b)$  は、左辺は割り切れるが、右辺は  $a^t$  が割り切れないので、成り立たない。

ゆえに、 $(a)$  式は成り立たず、 $c^n - b^n = a^n$  は成り立たない。

よって、フェルマーの最終定理は証明された。