

フェルマーの最終定理の初等的証明

壊れた扉（完成者）

愛犬ベルのために（基案者）

最新 2021 年 10 月 28 日第 2 版

更新履歴

初版 2021 年 10 月 28 日

第 2 版 2021 年 10 月 28 日「 a : 奇数, b : 奇数, c : 偶数 の場合」の「左辺が奇数になった場合」の 2 の指数修正

はじめに

*1 フェルマーの最終定理は $n = 3, 4$ の場合などが初等的に証明されていて、例えば、 $n = 15$ の場合などは、 $(a^5)^3 + (b^5)^3 = (c^5)^3$ などとすれば成り立たない事は自明なので、あとは n が奇素数の場合のみ考えれば良い。

そこで、 $a^n + b^n = c^n$ (n は奇素数) となる自然数 a, b, c が存在すると仮定すると、

- i. a : 偶数, b : 偶数, c : 偶数
- ii. a : 偶数, b : 奇数, c : 奇数
- iii. a : 奇数, b : 奇数, c : 偶数

の 3 通りの場合があり、i. の場合は両辺を 2 で割り続ければ ii. か iii. の場合に帰着する。よって、ii.、iii. の場合を示せば良い。

*1 フェルマーの最終定理を初等的証明で解いて見ました。基本案は愛犬ベルのためにですが、大幅に改定して下さったのが壊れた扉さんです。

1 a : 偶数 , b : 奇数 , c : 奇数の場合

$a = 2^u p, b = 2q + 1, c = 2r + 1$ (p, q, r, u は自然数で p は奇数とする) と置いて $a^n + b^n = c^n$ に代入すると、

$$(2^u p)^n + (2q + 1)^n = (2r + 1)^n$$

$$(2^u p)^n = (2r + 1)^n - (2q + 1)^n$$

これを二項定理で展開すると、

$$\begin{aligned} 2^{un} p^n &= (2r)^n + {}_n C_1 (2r)^{n-1} + {}_n C_2 (2r)^{n-2} + \dots + {}_n C_{n-2} (2r)^2 + {}_n C_1 (2r) + 1 \\ &\quad - \{(2q)^n + {}_n C_1 (2q)^{n-1} + {}_n C_2 (2q)^{n-2} + \dots + {}_n C_{n-2} (2q)^2 + {}_n C_1 (2q) + 1\} \\ &= 2^n (r^n - q^n) + {}_n C_1 2^{n-1} \{r^{n-1} - q^{n-1}\} + {}_n C_2 2^{n-2} \{r^{n-2} - q^{n-2}\} + \dots \\ &\quad + {}_n C_{n-2} 2^2 (r^2 - q^2) + {}_n C_{n-1} 2(r - q) \end{aligned}$$

公式

$$a^n - b^n = (a - b) \{a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}\}$$

を考えれば、この右辺は $2(r - q)$ で割り切れるので、左辺も $2(r - q)$ で割り切れ、左辺は偶数である。

ところが、 n は奇素数 ${}_n C_{n-1} = n$ より右辺は 偶数 + 奇数 となり奇数である。よって、矛盾が生じる。

1.0.1 左辺が奇数になった場合

この右辺は $2(r - q)$ で割り切れるので、左辺も $2(r - q)$ で割り切れ、左辺は奇数になったとする。

$$\begin{aligned} 2^{un} p^n &= 2^n (r^n - q^n) + {}_n C_1 2^{n-1} \{r^{n-1} - q^{n-1}\} + {}_n C_2 2^{n-2} \{r^{n-2} - q^{n-2}\} + \dots \\ &\quad + {}_n C_{n-2} 2^2 (r^2 - q^2) + {}_n C_{n-1} 2(r - q) \end{aligned}$$

ここで、 n は奇素数なので、 $p^n = nP + p^{*2}$ と置ける。 p 奇数より、 P も奇数である。ここで、たとえば、 $\{r^{n-1} - q^{n-1}\}$ を $(r - q)$ で割ったものを $\{r^{n-1} - q^{n-1}\}'$ のように、' をつける。

$$\begin{aligned} p^n &= 2^{n-1} (r^n - q^n)' + {}_n C_1 2^{n-2} \{r^{n-1} - q^{n-1}\}' + {}_n C_2 2^{n-3} \{r^{n-2} - q^{n-2}\}' + \dots \\ &\quad + {}_n C_{n-2} 2(r + q) + {}_n C_{n-1} \end{aligned}$$

$$p^n = 2^{n-1} (r^n - q^n)' + {}_n C_1 2^{n-2} \{r^{n-1} - q^{n-1}\}' + {}_n C_2 2^{n-3} \{r^{n-2} - q^{n-2}\}' + \dots$$

*2 詳細は、<http://y-daisan.private.coocan.jp/html/felmer-7.pdf> 参照

$$+ {}_n C_{n-2} 2(r+q) + n$$

$$nP + p = 2^{n-1}(r^n - q^n)' + {}_n C_1 2^{n-2} \{r^{n-1} - q^{n-1}\}' + {}_n C_2 2^{n-3} \{r^{n-2} - q^{n-2}\}' + \dots \\ + {}_n C_{n-2} 2(r+q) + n$$

n を移項して、

$$nP + p - n = 2^{n-1}(r^n - q^n)' + {}_n C_1 2^{n-2} \{r^{n-1} - q^{n-1}\}' + {}_n C_2 2^{n-3} \{r^{n-2} - q^{n-2}\}' + \dots \\ + {}_n C_{n-2} 2(r+q)$$

$$n(P-1) + p = 2^{n-1}(r^n - q^n)' + {}_n C_1 2^{n-2} \{r^{n-1} - q^{n-1}\}' + {}_n C_2 2^{n-3} \{r^{n-2} - q^{n-2}\}' + \dots \\ + {}_n C_{n-2} 2(r+q)$$

ここで、左辺 $n(P-1) + p$ は、 P が奇数なので、 $(P-1)$ は偶数であり、 $n(P-1) + p$ は、奇数である。しかしながら、右辺は偶数。よって矛盾が生じる。

2 a : 奇数 , b : 奇数 , c : 偶数の場合

$a = 2p + 1, b = 2q - 1, c = 2^v r$ (p, q, r, v は自然数で、 r は奇数とする) として、 $a^n + b^n = c^n$ に代入すると、

$$(2p + 1)^n + (2q - 1)^n = (2^v r)^n$$

これを二項定理で展開すると、

$$2^{vn} r^n = (2p)^n + {}_n C_1 (2p)^{n-1} + {}_n C_2 (2p)^{n-2} + \dots + {}_n C_{n-2} (2p)^2 + {}_n C_1 (2p) + 1 \\ + \{(2q)^n + {}_n C_1 (2q)^{n-1} (-1) + {}_n C_2 (2q)^{n-2} (-1)^2 + \dots + {}_n C_{n-2} (2q)^2 (-1)^{n-2} + {}_n C_1 (2q) (-1)^{n-1} + (-1)^n\}$$

n は奇数より 1^n と $(-1)^n$ は相殺されて 0 になるので、

$$= 2^n (p^n + q^n) + {}_n C_1 2^{n-1} \{p^{n-1} - q^{n-1}\} + {}_n C_2 2^{n-2} \{p^{n-2} + q^{n-2}\} + \dots + \\ {}_n C_{n-2} 2^2 (p^2 - q^2) + {}_n C_{n-1} 2(p+q)$$

$$2^{vn} r^n = 2^n (p^n + q^n) + {}_n C_1 2^{n-1} \{p^{n-1} - q^{n-1}\} + {}_n C_2 2^{n-2} \{p^{n-2} + q^{n-2}\} + \dots + \\ {}_n C_{n-2} 2^2 (p^2 - q^2) + {}_n C_{n-1} 2(p+q)$$

ところで、 n が奇数の時、公式

$$a^n + b^n = (a+b) \{a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}\}$$

また、 n が偶数の時、公式

$$a^n - b^n = (a + b)\{a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - b^{n-1}\}$$

を利用すると、 n は奇素数より の右辺は $2(p + q)$ で割り切れるので、 の左辺も $p + q$ で割り切れ、左辺は偶数となる。

ところが、 n が奇素数 ${}_n C_{n-1} = n$ より の右辺は 偶数 + 奇数 となり奇数となる。よって、矛盾が生じる。

2.0.1 左辺が奇数になった場合

n は奇素数より の右辺は $2(p + q)$ で割り切れるので、 の左辺も $p + q$ で割り切れ、左辺は奇数になった場合を考える。

$$2^{vn} r^n = 2^n (p^n + q^n) + {}_n C_1 2^{n-1} \{p^{n-1} - q^{n-1}\} + {}_n C_2 2^{n-2} \{p^{n-2} + q^{n-2}\} + \dots + {}_n C_{n-2} 2^2 (p^2 - q^2) + {}_n C_{n-1} 2(p + q)$$

ここで、 n は奇素数なので、 $r^n = nR + r$ と置ける。 r 奇数より、 R も奇数である。ここで、たとえば、 $\{P^{n-1} \pm q^{n-1}\}$ を $(p + q)$ で割ったものを $\{p^{n-1} \pm q^{n-1}\}'$ のように、' をつける。

$$r^n = 2^{n-1} (p^n + q^n)' + {}_n C_1 2^{n-2} \{p^{n-1} - q^{n-1}\}' + {}_n C_2 2^{n-3} \{p^{n-2} + q^{n-2}\}' + \dots + {}_n C_{n-2} 2(p^2 - q^2)' + {}_n C_{n-1}$$

$$nR + r = 2^{n-1} (p^n + q^n)' + {}_n C_1 2^{n-2} \{p^{n-1} - q^{n-1}\}' + {}_n C_2 2^{n-3} \{p^{n-2} + q^{n-2}\}' + \dots + {}_n C_{n-2} 2(p^2 - q^2)' + n$$

n を移項して、

$$nR + r - n = 2^{n-1} (p^n + q^n)' + {}_n C_1 2^{n-2} \{p^{n-1} - q^{n-1}\}' + {}_n C_2 2^{n-3} \{p^{n-2} + q^{n-2}\}' + \dots + {}_n C_{n-2} 2(p^2 - q^2)'$$

$$n(R - 1) + r = 2^{n-1} (p^n + q^n)' + {}_n C_1 2^{n-2} \{p^{n-1} - q^{n-1}\}' + {}_n C_2 2^{n-3} \{p^{n-2} + q^{n-2}\}' + \dots + {}_n C_{n-2} 2(p - q)$$

ここで、左辺 $n(R - 1) + r$ は、 R が奇数なので、 $(R - 1)$ は偶数であり、 $n(R - 1) + r$ は、奇数である。しかしながら、右辺は偶数。よって矛盾が生じる。

よって、背理法により、 $a^n + b^n = c^n$ は成り立たない。よって、フェルマーの最終定理が初等的に示された。