

フェルマーの最終定理の初等的証明

壊れた扉 (アドバイザー)
愛犬ベルのために

最新 2021 年 12 月 8 日 第 1 版

更新履歴

初版 2021 年 12 月 8 日
第 1 版 2021 年 12 月 8 日 誤植の修正

はじめに

フェルマーの最終定理は $n = 3, 4$ の場合などが初等的に証明されていて、例えば、 $n = 15$ の場合などは、 $(a^5)^3 + (b^5)^3 = (c^5)^3$ などとすれば成り立たない事は自明なので、あとは n が奇素数の場合のみ考えれば良い。^{*1}

$a^n + b^n = c^n$ において、お互い素な自然数 a, b, c を素因数分解すると、 $a = st, b = uv, c = yz$ であったとすると、 a, b, c がお互い素な自然数なので、 s, t, u, v, y, z は皆違う素数である。したがって、 a, b, c 皆偶数はありえない。また、 a, b, c の 2 つが偶数もありえない。よって、 a, b, c のすべてが奇数か、 a, b, c のいずれか一つが偶数である。しかし、 a, b, c のすべてが奇数なら、 $a^n + b^n = c^n$ より、ありえない。したがって、 a, b, c のいずれか一つが偶数だけを考えればよい。

そこで、 $a^n + b^n = c^n$ (n は奇素数) となる自然数 a, b, c が存在すると仮定すると、

- i. a : 偶数, b : 奇数, c : 奇数 (a : 奇数, b : 偶数, c : 奇数)^{*2}
- ii. a : 奇数, b : 奇数, c : 偶数

の 2 通りの場合が考えられる。

^{*1} フェルマーの最終定理を初等的証明で解いて見ました。基本案は愛犬ベルのためにですが、不具合の修正とアドバイザーは壊れた扉さんです。

^{*2} a, b はどちらかが偶数の場合で、ここでは a : 偶数, b : 奇数, c : 奇数としているが、 a : 奇数, b : 偶数, c : 奇数でも、 a, b が入れ替わるだけで同等なので一緒に表す。

1 a : 偶数 , b : 奇数 , c : 奇数の場合

ここで、 $a = 2^m p$ (p は奇数), $b = 2q + 1$, $c = 2r + 1$ と置いて代入すると、

$$a^n = 2^{mn} p^n = c^n - b^n = (c - b)(c^{n-1} + c^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

$$2^{mn} p^n = 2(r - q)(c^{n-1} + c^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

ところで、 $c^{n-1} + c^{n-2}b + \dots + b^{n-1}$ は n 個の和で b, c, n は全て奇数より奇数が奇数個で総和は奇数である。

また、右辺は $2(r - q)$ で割り切れるので、左辺も割り切れ、 $2(r - q) = 2^{mn}$ 以外の時は矛盾が生じる。(左辺偶数 = 右辺奇数で)

よって、 $2(r - q) = 2^{mn}$ の場合を考えると、 $p^n = c^{n-1} + c^{n-2}b + \dots + b^{n-1}$

ここで、 $n = 3$ の場合、

$$p^3 = c^2 + cb + b^2$$

$n = 5$ の場合、

$$p^5 = c^4 + c^3b + c^2b^2 + cb^3 + b^4 = c^4 + b^4 + cb(c^2 + cb + b^2) = c^4 + b^4 + cb \cdot p^3$$

$$p^5 = c^4 + b^4 + cb \cdot p^3$$

$n = 7$ の場合、

$$p^7 = c^6 + c^5b + c^4b^2 + c^3b^3 + c^2b^4 + cb^5 + b^6 = c^6 + b^6 + cb(c^4 + c^3b + c^2b^2 + cb^3 + b^4)$$

$$= c^6 + b^6 + cb\{c^4 + b^4 + cb(c^2 + cb + b^2)\} = c^6 + b^6 + cb \cdot p^5$$

$$p^7 = c^6 + b^6 + cb \cdot p^5$$

以後同様に考えていくと、 $p^n = c^{n-1} + b^{n-1} + cb \cdot p^{n-2}$ が成り立つ。

$$p^n - bc \cdot p^{n-2} = c^{n-1} + b^{n-1}$$

$$p^{n-2}(p^2 - bc) = b^{n-1} + c^{n-1}$$

$$p^2 - bc = \frac{b^{n-1} + c^{n-1}}{p^{n-2}} \quad \text{--- (1)}$$

また、 $p^n = c^{n-1} + b^{n-1} + cb \cdot p^{n-2}$ の n を $n - 2$ として同様の変形をすると、

$$p^2 - bc = \frac{b^{n-3} + c^{n-3}}{p^{n-4}} \quad \text{--- (2)}$$

(1), (2) より、左辺が等しいから、

$$\frac{b^{n-1} + c^{n-1}}{p^{n-2}} = \frac{b^{n-3} + c^{n-3}}{p^{n-4}}$$

$$(b^{n-1} + c^{n-1})p^{n-4} = (b^{n-3} + c^{n-3})p^{n-2}$$

この等式が、正しいか調べてみると、*3

$$\begin{aligned}
& (c^{n-1} + b^{n-1})p^{n-4} - (c^{n-3} + b^{n-3})p^{n-2} \\
&= (c^{n-1} + b^{n-1})(c^{n-5} + c^{n-6}b + c^{n-7}b^2 + \dots + cb^{n-6} + b^{n-5}) \\
&\quad - (c^{n-3} + b^{n-3})(c^{n-3} + c^{n-4}b + c^{n-5}b^2 + \dots + cb^{n-4} + b^{n-3}) \\
&= c^{n-1}(c^{n-5} + c^{n-6}b + c^{n-7}b^2 + \dots + cb^{n-6} + b^{n-5}) \\
&\quad + b^{n-1}(c^{n-5} + c^{n-6}b + c^{n-7}b^2 + \dots + cb^{n-6} + b^{n-5}) \\
&\quad - c^{n-3}(c^{n-3} + c^{n-4}b + c^{n-5}b^2 + \dots + cb^{n-4} + b^{n-3}) \\
&\quad - b^{n-3}(c^{n-3} + c^{n-4}b + c^{n-5}b^2 + \dots + cb^{n-4} + b^{n-3}) \\
&= (c^{2n-6} + c^{2n-7}b + c^{2n-8}b^2 + c^{2n-9}b^3 + c^{2n-10}b^4 + \dots + c^{n+2}b^{n-8} + c^{n+1}b^{n-7} + c^n b^{n-6} + c^{n-1}b^{n-5}) \\
&\quad + (c^{n-5}b^{n-1} + c^{n-6}b^n + c^{n-7}b^{n+1} + c^{n-8}b^{n+2} + c^{n-9}b^{n+3} + \dots + c^3b^{2n-9} + c^2b^{2n-8} + cb^{2n-7} + b^{2n-6}) \\
&\quad - (c^{2n-6} + c^{2n-7}b + c^{2n-8}b^2 + c^{2n-9}b^3 + c^{2n-10}b^4 + \dots + c^n b^{n-6} + c^{n-1}b^{n-5} + c^{n-2}b^{n-4} + c^{n-3}b^{n-3}) \\
&\quad - (c^{n-3}b^{n-3} + c^{n-4}b^{n-2} + c^{n-5}b^{n-1} + c^{n-6}b^n + c^{n-7}b^{n+1} + \dots + c^3b^{2n-9} + c^2b^{2n-8} + cb^{2n-7} + b^{2n-6}) \\
&= -c^{n-2}b^{n-4} - c^{n-3}b^{n-3} - c^{n-3}b^{n-3} - c^{n-4}b^{n-2} \quad (\text{相殺されてこれらだけが残る。}) \\
&= -c^{n-2}b^{n-4} - 2c^{n-3}b^{n-3} - c^{n-4}b^{n-2} \\
&= -c^{n-4}b^{n-4}(c+b)^2
\end{aligned}$$

これは負より、

$$\begin{aligned}
& (c^{n-1} + b^{n-1})p^{n-4} - (c^{n-3} + b^{n-3})p^{n-2} < 0 \\
& (c^{n-1} + b^{n-1})p^{n-4} < (c^{n-3} + b^{n-3})p^{n-2} \\
& (c^{n-1} + b^{n-1})p^{n-4} \neq (c^{n-3} + b^{n-3})p^{n-2}
\end{aligned}$$

よって、矛盾。

*3

$$\begin{aligned}
p^{n-2} &= c^{n-3} + c^{n-4}b + c^{n-5}b^2 + \dots + cb^{n-4} + b^{n-3} \\
p^{n-4} &= c^{n-5} + c^{n-6}b + c^{n-7}b^2 + \dots + cb^{n-6} + b^{n-5}
\end{aligned}$$

2 a : 奇数 , b : 奇数 , c : 偶数の場合

この場合、

$$c^n = a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

ここで、 $a = 2p + 1, b = 2q - 1, c = 2^m r$ (r は奇数) と置いて代入すると、

$$2^{mn} r^n = 2(p + q)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

ところで、 $a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}$ は n 個の和と差で a, b, n は全て奇数より奇数が奇数個で総和は奇数である。

また、右辺は $2(p + q)$ で割り切れるので、左辺も割り切れ、 $2(p + q) = 2^{mn}$ 以外の時以外は矛盾が生じる。(左辺偶数 = 右辺奇数で)

よって、 $2(p + q) = 2^{mn}$ の場合を考えると、 $r^n = a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}$

ここで、 $n = 3$ の場合、

$$r^3 = a^2 - ab + b^2$$

$n = 5$ の場合、

$$\begin{aligned} r^5 &= a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 = a^4 + b^4 - ab(a^2 - ab + b^2) \\ &= a^4 + b^4 - ab \cdot r^3 \\ r^5 &= a^4 + b^4 - ab \cdot r^3 \end{aligned}$$

$n = 7$ の場合、

$$\begin{aligned} r^7 &= a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6 = a^6 + b^6 - ab(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) \\ &= a^6 + b^6 - ab\{a^4 + b^4 - ab(a^2 - ab + b^2)\} = a^6 + b^6 - ab \cdot r^5 \\ r^7 &= a^6 + b^6 - ab \cdot r^5 \end{aligned}$$

以後同様に考えていくと、 $r^n = a^{n-1} + b^{n-1} - ab \cdot r^{n-2}$ が成り立つ。

$$\begin{aligned} r^n - ab \cdot r^{n-2} &= a^{n-1} + b^{n-1} \\ r^{n-2}(r^2 + ab) &= a^{n-1} + b^{n-1} \\ r^2 + ab &= \frac{a^{n-1} + b^{n-1}}{r^{n-2}} \quad \text{--- (3)} \end{aligned}$$

また、 $p^n = a^{n-1} + b^{n-1} - ab \cdot r^{n-2}$ の n を $n - 2$ として同様の変形をすると、

$$r^2 + ab = \frac{a^{n-3} + b^{n-3}}{r^{n-4}} \quad \text{--- (4)}$$

(3), (4) より、左辺が等しいから、

$$\frac{a^{n-1} + b^{n-1}}{r^{n-2}} = \frac{a^{n-3} + b^{n-3}}{r^{n-4}}$$

$$(a^{n-1} + b^{n-1})r^{n-4} = (a^{n-3} + b^{n-3})r^{n-2}$$

この等式が、正しいか調べてみると、*4

$$\begin{aligned} & (a^{n-1} + b^{n-1})r^{n-4} - (a^{n-3} + b^{n-3})r^{n-2} \\ &= (a^{n-1} + b^{n-1})(a^{n-5} - a^{n-6}b + a^{n-7}b^2 - a^{n-8}b^3 + \dots + a^2b^{n-7} - ab^{n-6} + b^{n-5}) \\ & \quad - (a^{n-3} + b^{n-3})(a^{n-3} - a^{n-4}b + a^{n-5}b^2 - a^{n-6}b^3 + \dots + a^2b^{n-5} - ab^{n-4} + b^{n-3}) \\ &= a^{n-1}(a^{n-5} - a^{n-6}b + a^{n-7}b^2 - a^{n-8}b^3 + \dots + a^2b^{n-7} - ab^{n-6} + b^{n-5}) \\ & \quad + b^{n-1}(a^{n-5} - a^{n-6}b + a^{n-7}b^2 - a^{n-8}b^3 + \dots + a^2b^{n-7} - ab^{n-6} + b^{n-5}) \\ & \quad - a^{n-3}(a^{n-3} - a^{n-4}b + a^{n-5}b^2 - a^{n-6}b^3 + \dots + a^2b^{n-5} - ab^{n-4} + b^{n-3}) \\ & \quad - b^{n-3}(a^{n-3} - a^{n-4}b + a^{n-5}b^2 - a^{n-6}b^3 + \dots + a^2b^{n-5} - ab^{n-4} + b^{n-3}) \\ &= (a^{2n-6} - a^{2n-7}b + a^{2n-8}b^2 - a^{2n-9}b^3 + a^{2n-10}b^4 - a^{2n-11}b^5 \dots \\ & \quad + a^{n+3}b^{n-9} - a^{n+2}b^{n-8} + a^{n+1}b^{n-7} - a^n b^{n-6} + a^{n-1}b^{n-5}) \\ & \quad + (a^{n-5}b^{n-1} - a^{n-6}b^n + a^{n-7}b^{n+1} - a^{n-8}b^{n+2} + a^{n-9}b^{n+3} \dots \\ & \quad - a^5b^{2n-11} + a^4b^{2n-10} - a^3b^{2n-9} + a^2b^{2n-8} - ab^{2n-7})b^{2n-6}) \\ & \quad - (a^{2n-6} - a^{2n-7}b + a^{2n-8}b^2 - a^{2n-9}b^3 + a^{2n-10}b^4 - a^{2n-11}b^5 \dots \\ & \quad + a^{n+1}b^{n-7} - a^n b^{n-6} + a^{n-1}b^{n-5} - a^{n-2}b^{n-4} + a^{n-3}b^{n-3}) \\ & \quad - (a^{n-3}b^{n-3} - a^{n-4}b^{n-2} + a^{n-5}b^{n-1} - a^{n-6}b^n + a^{n-7}b^{n+1} \dots \\ & \quad - a^5b^{2n-11} + a^4b^{2n-10} - a^3b^{2n-9} + a^2b^{2n-8} - ab^{2n-7} + b^{2n-6}) \\ &= a^{n-2}b^{n-4} - a^{n-3}b^{n-3} - a^{n-3}b^{n-3} + a^{n-4}b^{n-2} \quad (\text{相殺されてこれらだけ残る}) \\ &= a^{n-2}b^{n-4} - 2a^{n-3}b^{n-3} + a^{n-4}b^{n-2} \\ &= a^{n-4}b^{n-4}(a^2 - 2ab + b^2) \end{aligned}$$

*4

$$\begin{aligned} r^{n-2} &= a^{n-3} - a^{n-4}b + a^{n-5}b^2 - \dots - ab^{n-4} + b^{n-3} \\ r^{n-4} &= a^{n-5} - a^{n-6}b + a^{n-7}b^2 - \dots - ab^{n-6} + b^{n-5} \end{aligned}$$

$$= a^{n-4}b^{n-4}(a-b)^2$$

これは正より、

$$(a^{n-1} + b^{n-1})r^{n-4} - (a^{n-3} + b^{n-3})r^{n-2} > 0$$

$$(a^{n-1} + b^{n-1})r^{n-4} > (a^{n-3} + b^{n-3})r^{n-2}$$

$$(a^{n-1} + b^{n-1})r^{n-4} \neq (a^{n-3} + b^{n-3})r^{n-2}$$

よって、矛盾。

よって、背理法により、 $a^n + b^n = c^n$ が成り立つ自然数 a, b, c は存在しない。

よって、フェルマーの最終定理が初等的に証明された。

3 補足 1

p^{13} より、

$$p^2 - bc = \frac{c^{12} + b^{12}}{p^{11}} \quad \text{----- (1)}$$

p^{11} より、

$$p^2 - bc = \frac{c^{10} + b^{10}}{p^9} \quad \text{----- (2)}$$

p^9 より、

$$p^2 - bc = \frac{c^8 + b^8}{p^7} \quad \text{----- (3)}$$

p^7 より、

$$p^2 - bc = \frac{c^6 + b^6}{p^5} \quad \text{----- (4)}$$

p^5 より、

$$p^2 - bc = \frac{c^4 + b^4}{p^3} \quad \text{----- (5)}$$

3.1 (4) = (5) ?

左辺は等しいから (4) = (5)。*5

$$\frac{(c^6 + b^6)}{p^5} = \frac{(c^4 + b^4)}{p^3}$$

$$(c^6 + b^6)p^3 = (c^4 + b^4)p^5$$

そこで、本当に等しいか調べてみる。

$$(c^6 + b^6)p^3 - (c^4 + b^4)p^5$$

$$= (c^6 + b^6)(c^2 + cb + b^2) - (c^4 + b^4)(c^4 + c^3b + c^2b^2 + cb^3 + b^4)$$

$$= c^6(c^2 + cb + b^2)$$

*5

$$p^3 = c^2 + cb + b^2$$

$$p^5 = c^4 + c^3b + c^2b^2 + cb^3 + b^4$$

$$p^7 = c^6 + c^5b + c^4b^2 + c^3b^3 + c^2b^4 + cb^5 + b^6$$

$$p^9 = c^8 + c^7b + c^6b^2 + c^5b^3 + c^4b^4 + c^3b^5 + c^2b^6 + cb^7 + b^8$$

$$p^{11} = c^{10} + c^9b + c^8b^2 + c^7b^3 + c^6b^4 + c^5b^5 + c^4b^6 + c^3b^7 + c^2b^8 + cb^9 + b^{10}$$

$$\begin{aligned}
& +b^6(c^2 + cb + b^2) \\
& -c^4(c^4 + c^3b + c^2b^2 + cb^3 + b^4) \\
& -b^4(c^4 + c^3b + c^2b^2 + cb^3 + b^4) \\
& = c^8 + c^7b + c^6b^2 \\
& \quad + c^2b^6 + cb^7 + b^8 \\
& -(c^8 + c^7b + c^6b^2 + c^5b^3 + c^4b^4) \\
& -(c^4b^4 + c^3b^5 + c^2b^6 + cb^7 + b^8) \\
& = -c^5b^3 - c^4b^4 - c^4b^4 - c^3b^5 \\
& = -c^5b^3 - 2c^4b^4 - c^3b^5 \\
& = -c^3b^3(c^2 + 2cb + b^2) \\
& = -c^3b^3(c + b)^2
\end{aligned}$$

c, b は自然数より、負の値ですね。よって、(4) \neq (5)

3.2 (3) = (4) ?

左辺は等しいから (3)=(4)。

$$\begin{aligned}
\frac{(c^8 + b^8)}{p^7} &= \frac{(c^6 + b^6)}{p^5} \\
(c^8 + b^8)p^5 &= (c^6 + b^6)p^7
\end{aligned}$$

そこで、本当に等しいか調べてみる。

$$\begin{aligned}
& (c^8 + b^8)p^5 - (c^6 + b^6)p^7 \\
& = (c^8 + b^8)(c^4 + c^3b + c^2b^2 + cb^3 + b^4) - (c^6 + b^6)(c^6 + c^5b + c^4b^2 + c^3b^3 + c^2b^4 + cb^5 + b^6) \\
& = c^8(c^4 + c^3b + c^2b^2 + cb^3 + b^4) \\
& \quad + b^8(c^4 + c^3b + c^2b^2 + cb^3 + b^4) \\
& - c^6(c^6 + c^5b + c^4b^2 + c^3b^3 + c^2b^4 + cb^5 + b^6) \\
& - b^6(c^6 + c^5b + c^4b^2 + c^3b^3 + c^2b^4 + cb^5 + b^6) \\
& = c^{12} + c^{11}b + c^{10}b^2 + c^9b^3 + c^8b^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +c^4b^8 + c^3b^9 + c^2b^{10} + cb^{11} + b^{12} \\
& -c^{12} - c^{11}b - c^{10}b^2 - c^9b^3 - c^8b^4 - c^7b^5 - c^6b^6 \\
& -c^6b^6 - c^5b^7 - c^4b^8 - c^3b^9 - c^2b^{10} - cb^{11} - b^{12} \\
& = -c^7b^5 - c^6b^6 - c^6b^6 - c^5b^7 \\
& = -c^7b^5 - 2c^6b^6 - c^5b^7 \\
& = -c^5b^5(c^2 + 2cb + b^2) \\
& = -c^5b^5(c+b)^2
\end{aligned}$$

c, b は自然数より、負の値ですね。よって、(3) \neq (4)

3.3 (2) = (3) ?

左辺は等しいから (2)=(3)。

$$\begin{aligned}
\frac{(c^{10} + b^{10})}{p^9} &= \frac{c^8 + b^8}{p^7} \\
(c^{10} + b^{10})p^7 &= (c^8 + b^8)p^9
\end{aligned}$$

そこで、本当に等しいか調べてみる。

$$\begin{aligned}
& (c^{10} + b^{10})p^7 - (c^8 + b^8)p^9 \\
& = (c^{10} + b^{10})(c^6 + c^5b + c^4b^2 + c^3b^3 + c^2b^4 + cb^5 + b^6) - (c^8 + b^8) \\
& \quad (c^8 + c^7b + c^6b^2 + c^5b^3 + c^4b^4 + c^3b^5 + c^2b^6 + cb^7 + b^8) \\
& = c^{10}(c^6 + c^5b + c^4b^2 + c^3b^3 + c^2b^4 + cb^5 + b^6) \\
& \quad + b^{10}(c^6 + c^5b + c^4b^2 + c^3b^3 + c^2b^4 + cb^5 + b^6) \\
& \quad - c^8(c^8 + c^7b + c^6b^2 + c^5b^3 + c^4b^4 + c^3b^5 + c^2b^6 + cb^7 + b^8) \\
& \quad - b^8(c^8 + c^7b + c^6b^2 + c^5b^3 + c^4b^4 + c^3b^5 + c^2b^6 + cb^7 + b^8) \\
& = c^{16} + c^{15}b + c^{14}b^2 + c^{13}b^3 + c^{12}b^4 + c^{11}b^5 + c^{10}b^6 \\
& \quad + c^6b^{10} + c^5b^{11} + c^4b^{12} + c^3b^{13} + c^2b^{14} + cb^{15} + b^{16} \\
& \quad - c^{16} - c^{15}b - c^{14}b^2 - c^{13}b^3 - c^{12}b^4 - c^{11}b^5 - c^{10}b^6 - c^9b^7 - c^8b^8 \\
& \quad - c^8b^8 - c^7b^9 - c^6b^{10} - c^5b^{11} - c^4b^{12} - c^3b^{13} - c^2b^{14} - cb^{15} - b^{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -c^9b^7 - c^8b^8 - c^8b^8 - c^7b^9 \\
&= -c^9b^7 - 2c^8b^8 - c^7b^9 \\
&= -c^7b^7(c^2 + 2cb + b^2) \\
&= -c^7b^7(c + b)^2
\end{aligned}$$

c, b は自然数より、負の値ですね。よって、(2) \neq (3)

3.4 (1) = (2) ?

左辺は等しいから (1)=(2)。

$$\begin{aligned}
\frac{(c^{12} + b^{12})}{p^{11}} &= \frac{(c^{10} + b^{10})}{p^9} \\
(c^{12} + b^{12})p^9 &= (c^{10} + b^{10})p^{11}
\end{aligned}$$

そこで、本当に等しいか調べてみる。

$$\begin{aligned}
&(c^{12} + b^{12})p^9 - (c^{10} + b^{10})p^{11} \\
&= (c^{12} + b^{12})(c^8 + c^7b + c^6b^2 + c^5b^3 + c^4b^4 + c^3b^5 + c^2b^6 + cb^7 + b^8) \\
&\quad - (c^{10} + b^{10})(c^{10} + c^9b + c^8b^2 + c^7b^3 + c^6b^4 + c^5b^5 + c^4b^6 + c^3b^7 + c^2b^8 + cb^9 + b^{10}) \\
&= c^{12}(c^8 + c^7b + c^6b^2 + c^5b^3 + c^4b^4 + c^3b^5 + c^2b^6 + cb^7 + b^8) \\
&\quad + b^{12}(c^8 + c^7b + c^6b^2 + c^5b^3 + c^4b^4 + c^3b^5 + c^2b^6 + cb^7 + b^8) \\
&\quad - c^{10}(c^{10} + c^9b + c^8b^2 + c^7b^3 + c^6b^4 + c^5b^5 + c^4b^6 + c^3b^7 + c^2b^8 + cb^9 + b^{10}) \\
&\quad - b^{10}(c^{10} + c^9b + c^8b^2 + c^7b^3 + c^6b^4 + c^5b^5 + c^4b^6 + c^3b^7 + c^2b^8 + cb^9 + b^{10}) \\
&= c^{20} + c^{19}b + c^{18}b^2 + c^{17}b^3 + c^{16}b^4 + c^{15}b^5 + c^{14}b^6 + c^{13}b^7 + c^{12}b^8 \\
&\quad + c^8b^{12} + c^7b^{13} + c^6b^{14} + c^5b^{15} + c^4b^{16} + c^3b^{17} + c^2b^{18} + cb^{19} + b^{20} \\
&\quad - c^{20} - c^{19}b - c^{18}b^2 - c^{17}b^3 - c^{16}b^4 - c^{15}b^5 - c^{14}b^6 - c^{13}b^7 - c^{12}b^8 - c^{11}b^9 - c^{10}b^{10} \\
&\quad - c^{10}b^{10} - c^9b^{11} - c^8b^{12} - c^7b^{13} - c^6b^{14} - c^5b^{15} - c^4b^{16} - c^3b^{17} - c^2b^{18} - cb^{19} - b^{20} \\
&= -c^{11}b^9 - c^{10}b^{10} - c^{10}b^{10} - c^9b^{11} \\
&= -c^{11}b^9 - 2c^{10}b^{10} - c^9b^{11} \\
&= -c^9b^9(c^2 + 2cb + b^2) \\
&= -c^9b^9(c + b)^2
\end{aligned}$$

c, b は自然数より、負の値ですね。よって、(1) \neq (2)

4 補足 2

r^{13} より、

$$r^2 + ab = \frac{a^{12} + b^{12}}{r^{11}} \quad \text{----- (1)}$$

r^{11} より、

$$r^2 + ab = \frac{a^{10} + b^{10}}{r^9} \quad \text{----- (2)}$$

r^9 より、

$$r^2 + ab = \frac{a^8 + b^8}{r^7} \quad \text{----- (3)}$$

r^7 より、

$$r^2 + ab = \frac{a^6 + b^6}{r^5} \quad \text{----- (4)}$$

r^5 より、

$$r^2 + ab = \frac{a^4 + b^4}{r^3} \quad \text{----- (5)}$$

4.1 (4) = (5) ?

左辺は等しいから (4)=(5)。*6

$$\frac{(a^6 + b^6)}{r^5} = \frac{(a^4 + b^4)}{r^3}$$

$$(a^6 + b^6)r^3 = (a^4 + b^4)r^5$$

そこで、本当に等しいか調べてみる。

$$\begin{aligned} & (a^6 + b^6)r^3 - (a^4 + b^4)r^5 \\ &= (a^6 + b^6)(a^2 + b^2 - ab) - (a^4 + b^4)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) \\ &= a^6(a^2 + b^2 - ab) \\ & \quad + b^6(a^2 + b^2 - ab) \end{aligned}$$

*6

$$\begin{aligned} r^3 &= a^2 + b^2 - ab \\ r^5 &= a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 \\ r^7 &= a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6 \\ r^9 &= a^8 - a^7b + a^6b^2 - a^5b^3 + a^4b^4 - a^3b^5 + a^2b^6 - ab^7 + b^8 \\ r^{11} &= a^{10} - a^9b + a^8b^2 - a^7b^3 + a^6b^4 - a^5b^5 + a^4b^6 - a^3b^7 + a^2b^8 - ab^9 + b^{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -a^4(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) \\
& -b^4(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) \\
& = a^8 + a^6b^2 - a^7b + a^2b^6 + b^8 - ab^7 \\
& \quad -a^8 + a^7b - a^6b^2 + a^5b^3 - a^4b^4 \\
& \quad -a^4b^4 + a^3b^5 - a^2b^6 + ab^7 - b^8 \\
& = a^5b^3 - a^4b^4 - a^4b^4 + a^3b^5 \\
& = a^5b^3 - 2a^4b^4 + a^3b^5 \\
& = a^3b^3(a^2 - 2ab + b^2) \\
& = a^3b^3(a - b)^2
\end{aligned}$$

a, b は自然数より、正の値ですね。よって、(4) \neq (5)

4.2 (3) = (4) ?

左辺は等しいから (3)=(4)。

$$\begin{aligned}
\frac{(a^8 + b^8)}{r^7} &= \frac{(a^6 + b^6)}{r^5} \\
(a^8 + b^8)r^5 &= (a^6 + b^6)r^7
\end{aligned}$$

そこで、本当に等しいか調べてみる。

$$\begin{aligned}
& (a^8 + b^8)r^5 - (a^6 + b^6)r^7 \\
& = (a^8 + b^8)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) - (a^6 + b^6)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6) \\
& = a^8(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) \\
& \quad + b^8(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) \\
& \quad - a^6(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6) \\
& \quad - b^6(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6) \\
& = a^{12} - a^{11}b + a^{10}b^2 - a^9b^3 + a^8b^4 \\
& \quad + a^4b^8 - a^3b^9 + a^2b^{10} - ab^{11} + b^{12} \\
& \quad - a^{12} + a^{11}b - a^{10}b^2 + a^9b^3 - a^8b^4 + a^7b^5 - a^6b^6 \\
& \quad - a^6b^6 + a^5b^7 - a^4b^8 + a^3b^9 - a^2b^{10} + ab^{11} - b^{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a^7b^5 - a^6b^6 - a^6b^6 + a^5b^7 \\
&= a^7b^5 - 2a^6b^6 + a^5b^7 \\
&= a^5b^5(a^2 - 2ab + b^2) \\
&= a^5b^5(a - b)^2
\end{aligned}$$

a, b は自然数より、正の値ですね。よって、(3) \neq (4)

4.3 (2) = (3) ?

左辺は等しいから (2)=(3)。

$$\begin{aligned}
\frac{(a^{10} + b^{10})}{r^9} &= \frac{(a^8 + b^8)}{r^7} \\
(a^{10} + b^{10})r^7 &= (a^8 + b^8)r^9
\end{aligned}$$

そこで、本当に等しいか調べてみる。

$$\begin{aligned}
&(a^{10} + b^{10})r^7 - (a^8 + b^8)r^9 \\
&= (a^{10} + b^{10})(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6) \\
&- (a^8 + b^8)(a^8 - a^7b + a^6b^2 - a^5b^3 + a^4b^4 - a^3b^5 + a^2b^6 - ab^7 + b^8) \\
&= a^{10}(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6) \\
&\quad + b^{10}(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6) \\
&- a^8(a^8 - a^7b + a^6b^2 - a^5b^3 + a^4b^4 - a^3b^5 + a^2b^6 - ab^7 + b^8) \\
&- b^8(a^8 - a^7b + a^6b^2 - a^5b^3 + a^4b^4 - a^3b^5 + a^2b^6 - ab^7 + b^8) \\
&= a^{16} - a^{15}b + a^{14}b^2 - a^{13}b^3 + a^{12}b^4 - a^{11}b^5 + a^{10}b^6 \\
&\quad + a^6b^{10} - a^5b^{11} + a^4b^{12} - a^3b^{13} + a^2b^{14} - ab^{15} + b^{16} \\
&- a^{16} + a^{15}b - a^{14}b^2 + a^{13}b^3 - a^{12}b^4 + a^{11}b^5 - a^{10}b^6 + a^9b^7 - a^8b^8 \\
&- a^8b^8 + a^7b^9 - a^6b^{10} + a^5b^{11} - a^4b^{12} + a^3b^{13} - a^2b^{14} + ab^{15} - b^{16} \\
&= a^9b^7 - a^8b^8 - a^8b^8 + a^7b^9 \\
&= a^9b^7 - 2a^8b^8 + a^7b^9 \\
&= a^7b^7(a^2 - 2ab + b^2) \\
&= a^7b^7(a - b)^2
\end{aligned}$$

a, b は自然数より、正の値ですね。よって、(2) \neq (3)

4.4 (1) = (2) ?

左辺は等しいから (1)=(2)。

$$\frac{(a^{12} + b^{12})}{r^{11}} = \frac{(a^{10} + b^{10})}{r^9}$$

$$(a^{12} + b^{12})r^9 = (a^{10} + b^{10})r^{11}$$

そこで、本当に等しいか調べてみる。

$$\begin{aligned} & (a^{12} + b^{12})r^9 - (a^{10} + b^{10})r^{11} \\ &= (a^{12} + b^{12})(a^8 - a^7b + a^6b^2 - a^5b^3 + a^4b^4 - a^3b^5 + a^2b^6 - ab^7 + b^8) \\ & - (a^{10} + b^{10})(a^{10} - a^9b + a^8b^2 - a^7b^3 + a^6b^4 - a^5b^5 + a^4b^6 - a^3b^7 + a^2b^8 - ab^9 + b^{10}) \\ &= a^{12}(a^8 - a^7b + a^6b^2 - a^5b^3 + a^4b^4 - a^3b^5 + a^2b^6 - ab^7 + b^8) \\ & + b^{12}(a^8 - a^7b + a^6b^2 - a^5b^3 + a^4b^4 - a^3b^5 + a^2b^6 - ab^7 + b^8) \\ & - a^{10}(a^{10} - a^9b + a^8b^2 - a^7b^3 + a^6b^4 - a^5b^5 + a^4b^6 - a^3b^7 + a^2b^8 - ab^9 + b^{10}) \\ & - b^{10}(a^{10} - a^9b + a^8b^2 - a^7b^3 + a^6b^4 - a^5b^5 + a^4b^6 - a^3b^7 + a^2b^8 - ab^9 + b^{10}) \\ &= a^{20} - a^{19}b + a^{18}b^2 - a^{17}b^3 + a^{16}b^4 - a^{15}b^5 + a^{14}b^6 - a^{13}b^7 + a^{12}b^8 \\ & + a^8b^{12} - a^7b^{13} + a^6b^{14} - a^5b^{15} + a^4b^{16} - a^3b^{17} + a^2b^{18} - ab^{19} + b^{20} \\ & - a^{20} + a^{19}b - a^{18}b^2 + a^{17}b^3 - a^{16}b^4 + a^{15}b^5 - a^{14}b^6 + a^{13}b^7 - a^{12}b^8 + a^{11}b^9 - a^{10}b^{10} \\ & - a^{10}b^{10} + a^9b^{11} - a^8b^{12} + a^7b^{13} - a^6b^{14} + a^5b^{15} - a^4b^{16} + a^3b^{17} - a^2b^{18} + ab^{19} - b^{20} \\ &= a^{11}b^9 - a^{10}b^{10} - a^{10}b^{10} + a^9b^{11} \\ &= a^{11}b^9 - 2a^{10}b^{10} + a^9b^{11} \\ &= a^9b^9(a^2 - 2ab + b^2) \\ &= a^9b^9(a - b)^2 \end{aligned}$$

a, b は自然数より、正の値ですね。よって、(1) \neq (2)