

フェルマーの最終定理の初等的証明

壊れた扉（アドバイザー）
愛犬ベルのために

最新 2021 年 11 月 29 日第 1 版

更新履歴

初版 2021 年 10 月 27 日
第 1 版 2021 年 11 月 29 日 壊れた扉さんの関わりの修正

はじめに

*1 フェルマーの最終定理は $n = 3, 4$ の場合などが初等的に証明されていて、例えば、 $n = 15$ の場合などは、 $(a^5)^3 + (b^5)^3 = (c^5)^3$ などとすれば成り立たない事は自明なので、あとは n が奇素数の場合のみ考えれば良い。

そこで、 $a^n + b^n = c^n$ (n は奇素数) となる自然数 a, b, c が存在すると仮定すると、

- i. a : 偶数, b : 偶数, c : 偶数
- ii. a : 偶数, b : 奇数, c : 奇数
- iii. a : 奇数, b : 奇数, c : 偶数

の 3 通りの場合があり、i. の場合は両辺を 2 で割り続ければ ii. か iii. の場合に帰着する。よって、ii.、iii. の場合を示せば良い。

1 a : 偶数, b : 奇数, c : 奇数の場合

$a = 2p, b = 2q + 1, c = 2r + 1$ (p, q, r は自然数) と置いて $a^n + b^n = c^n$ に代入すると、

$$(2p)^n + (2q + 1)^n = (2r + 1)^n$$

$$(2p)^n = (2r + 1)^n - (2q + 1)^n$$

*1 フェルマーの最終定理を初等的証明で解いて見ました。基本案は愛犬ベルのためにですが、不具合の修正とアドバイザーは壊れた扉さんです。

これを二項定理で展開すると、

$$\begin{aligned}
 2^n p^n &= (2r)^n + {}_n C_1 (2r)^{n-1} + {}_n C_2 (2r)^{n-2} + \cdots + {}_n C_{n-2} (2r)^2 + {}_n C_1 (2r) + 1 \\
 &\quad - \{ (2q)^n + {}_n C_1 (2q)^{n-1} + {}_n C_2 (2q)^{n-2} + \cdots + {}_n C_{n-2} (2q)^2 + {}_n C_1 (2q) + 1 \} \\
 &= 2^n (r^n - q^n) + {}_n C_1 2^{n-1} \{ r^{n-1} - q^{n-1} \} + {}_n C_2 2^{n-2} \{ r^{n-2} - q^{n-2} \} + \cdots \\
 &\quad + {}_n C_{n-2} 2^2 (r^2 - q^2) + {}_n C_{n-1} 2 (r - q)
 \end{aligned}$$

公式

$$a^n - b^n = (a - b) \{ a^{n-1} + a^{n-2} b + \cdots + a b^{n-2} + b^{n-1} \}$$

を考えれば、この右辺は $2(r - q)$ で割り切れるので、左辺も $2(r - q)$ で割り切れ、左辺は偶数である。

ところが、 n は奇素数 ${}_n C_{n-1} = n$ より右辺は 偶数 + 奇数 となり奇数である。よって、矛盾が生じる。

2 a : 奇数 , b : 奇数 , c : 偶数の場合

$a = 2p + 1, b = 2q - 1, c = 2r$ (p, q, r は自然数) として、 $a^n + b^n = c^n$ に代入すると、

$$(2p + 1)^n + (2q - 1)^n = (2r)^n$$

これを二項定理で展開すると、

$$\begin{aligned}
 2^n r^n &= (2p)^n + {}_n C_1 (2p)^{n-1} + {}_n C_2 (2p)^{n-2} + \cdots + {}_n C_{n-2} (2p)^2 + {}_n C_1 (2p) + 1 \\
 &+ \{ (2q)^n + {}_n C_1 (2q)^{n-1} (-1) + {}_n C_2 (2q)^{n-2} (-1)^2 + \cdots + {}_n C_{n-2} (2q)^2 (-1)^{n-2} + {}_n C_1 (2q) (-1)^{n-1} + (-1)^n \}
 \end{aligned}$$

n は奇数より 1^n と $(-1)^n$ は相殺されて 0 になるので、

$$\begin{aligned}
 &= 2^n (p^n + q^n) + {}_n C_1 2^{n-1} \{ p^{n-1} - q^{n-1} \} + {}_n C_2 2^{n-2} \{ p^{n-2} + q^{n-2} \} + \cdots + \\
 &\quad {}_n C_{n-2} 2^2 (p^2 - q^2) + {}_n C_{n-1} 2 (p + q)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2^n r^n &= 2^n (p^n + q^n) + {}_n C_1 2^{n-1} \{ p^{n-1} - q^{n-1} \} + {}_n C_2 2^{n-2} \{ p^{n-2} + q^{n-2} \} + \cdots + \\
 &\quad {}_n C_{n-2} 2^2 (p^2 - q^2) + {}_n C_{n-1} 2 (p + q)
 \end{aligned}$$

ところで、 n が奇数の時、公式

$$a^n + b^n = (a + b) \{ a^{n-1} - a^{n-2} b + \cdots + b^{n-1} \}$$

また、 n が偶数の時、公式

$$a^n - b^n = (a - b) \{ a^{n-1} + a^{n-2} b + \cdots + b^{n-1} \}$$

を利用すると、 n は奇素数より の右辺は $2(p+q)$ で割り切れるので、 の左辺も $p+q$ で割り切れ、左辺は偶数となる。

ところが、 n が奇素数 $n C_{n-1} = n$ より の右辺は 偶数 + 奇数 となり奇数となる。 よって、矛盾が生じる。

よって、背理法により、 $a^n + b^n = c^n$ は成り立たない。 よって、フェルマーの最終定理が初等的に示された。