

フェルマーの最終定理の証明

愛犬ベルのために

最新 2021 年 11 月 13 日

はじめに

これは、BBS「数の不思議世界」で、壊れた扉さんと議論しながら、完成したものです。ここまでたどり着くには、壊れた扉さんのご尽力があったからこそで、改めてお礼を申し上げます。

更新履歴

2021.11.13 新規作成

フェルマーの最終定理

$a^n + b^n = c^n$ が成り立つお互いに素である自然数 a, b, c が存在すると仮定する。

自然数領域において、 $a^n = c^n - b^n$ で、 $c = b + j$ (ただし、 $j > 0$) と置くと、グラフにすると、 c^n も b^n も単調増加である。 $c^n = (b + j)^n$ だから b^n より大きい。

そこで、 $g(b) = (b + j)^n - b^n$ とすると、 $g(b) = (b + j)^n - b^n > 0$ 。

$x > 0$ において、 $g(x) = (x + j)^n - x^n$ とすると、 $(x + j)^n$ と x^n は交点をもたない。 $(x + j)^n$ と x^n はお互いに独立である。

なぜなら、 $(x + j)^n$ は x^n を左に、 j だけ平行移動しただけの同じ関数であるからである。

また、 $(x + j)^n > x^n$ より、 $g(x) > 0$ 。つまり、 $x > 0$ であるいかなる x においても $g(x) \neq 0$ なので、 $g(u) = (x - u)g'(u) = 0$ とできない。つまり、 $g(x)$ は因数分解できない。

したがって、 $c^n - b^n = a^n$ のように、左辺は、因数分解できないので、右辺の様にできない。

よって、フェルマーの最終定理は証明された。

0.1 補足

公式

$$a^n - b^n = (a - b)\{a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}\}$$

より、 $g(x) = (x + j)^n - x^n$ が因数分解できるはずだと思うかもしれない。

しかし、 a, b は自然数なので、 $a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1} > 0$ である。したがって、因数定理より、 $a^n - b^n = 0$ にできなければ、因数分解できない。つまり、 $a = b$ である。よって、

$$a^n - b^n = (a - b)\{a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}\}$$

と因数分解できるのである。

ここで、 $b = a + j$ とすると、 $a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1} > 0$ である。ゆえに、因数定理より $a - b = a - (a + j) = j$ が $= 0$ でなければならぬが、 $j > 0$ なので、因数分解できない。

つまり、この公式は、 a, b がお互い独立であることが、前提であり、 a, b がお互いに従属関係である時、使えないのであることに注意すべきである。