

フェルマーの最終定理について

壊れた扉 (完成者)
愛犬ベルのために (基案者)

最新 2018 年 3 月 28 日

更新履歴

初版 2018 年 3 月 22 日

はじめに

フェルマーの最終定理について奇数と偶数という面で解いて見ました。基本案は愛犬ベルのためにですが、大幅に改定して下さったのが壊れた扉さんです。

$x^n + y^n = z^n$ となる自然数 x, y, z が存在すると仮定すると、

- i. x : 奇数, y : 奇数, z : 偶数の場合
- ii. x : 奇数, y : 偶数, z : 奇数の場合
- iii. x : 偶数, y : 偶数, z : 偶数の場合

がある。

iii. の場合は両辺を 2 で割り続ければ i. か ii. の場合に帰着するので i. か ii. の場合を示せば良い。

1 x : 奇数, y : 奇数, z : 偶数の場合

$x = 2k + 1, y = 2j + 1, z = 2l$ と置くと、

$$\text{左辺} = x^n + y^n = (2k + 1)^n + (2j + 1)^n$$

ここで、

$$x^n = (2k + 1)^n$$

二項定理より

$$x^n = {}_n C_0 (2k)^n 1^0 + {}_n C_1 (2k)^{n-1} 1^1 + {}_n C_2 (2k)^{n-2} 1^2 + \cdots + {}_n C_r (2k)^{n-r} 1^r + \cdots + {}_n C_n (2k)^{n-n} 1^n$$

$$x^n = (2k)^n + {}_n C_1 (2k)^{n-1} + {}_n C_2 (2k)^{n-2} + \cdots + {}_n C_{n-(n-1)} (2k) + 1$$

同様に

$$y^n = (2j + 1)^n$$

$$y^n = (2j)^n + {}_n C_1 (2j)^{n-1} + {}_n C_2 (2j)^{n-2} + \cdots + {}_n C_{n-(n-1)} (2j) + 1$$

よって、

$$\begin{aligned} x^n + y^n &= (2k)^n + (2j)^n + {}_n C_1 \{(2k)^{n-1} + (2j)^{n-1}\} + \cdots + {}_n C_{n-1} 2(k+j) + 2 \\ &= 2^n k^n + 2^n j^n + {}_n C_1 \{2^{n-1} k^{n-1} + 2^{n-1} j^{n-1}\} + \cdots + {}_n C_{n-1} 2(k+j) + 2 \\ &= 2^n k^n + 2^n j^n + {}_n C_1 \{2^{n-1} k^{n-1} + 2^{n-1} j^{n-1}\} + \cdots + {}_n C_{n-(n-1)} 2(k+j) + 2 \\ &= 2[2^{n-1} k^n + 2^n j^n + {}_n C_1 \{2^{n-2} k^{n-1} + 2^{n-2} j^{n-1}\} + \cdots + n C_{n-(n-1)} (k+j) + 1] \end{aligned}$$

1.0.1 k, j が共に奇数または共に偶数の場合

$k + j$ は偶数より、左辺 $x^n + y^n = 2(\text{偶数} + 1) = 2 \times \text{奇数}$ 。一方、右辺 $= z^n = (2l)^n$ より、 $2 \times \text{奇数} = 2^n l^n$ よって、奇数 $= 2^{n-1} l^n = \text{偶数}$ で矛盾。

1.0.2 k, j が偶数, 奇数に分かれる場合

$k + j$ は奇数より例えば $k + j = 2a + 1$ ならば、

$$\begin{aligned} x^n + y^n &= 2[2^{n-1} k^n + 2^n j^n + {}_n C_1 \{2^{n-2} k^{n-1} + 2^{n-2} j^{n-1}\} + \cdots + n C_{n-(n-1)} (k+j) + 1] \\ &= 2[2^{n-1} k^n + 2^n j^n + {}_n C_1 \{2^{n-2} k^{n-1} + 2^{n-2} j^{n-1}\} + \cdots + n(2a+1) + 1] \\ &= 2[2^{n-1} k^n + 2^n j^n + {}_n C_1 \{2^{n-2} k^{n-1} + 2^{n-2} j^{n-1}\} + \cdots + 2an + n + 1] \end{aligned}$$

となり、 $n = 2m$ の偶数なら

$$\begin{aligned} x^n + y^n &= 2[2^{n-1} k^n + 2^n j^n + {}_n C_1 \{2^{n-2} k^{n-1} + 2^{n-2} j^{n-1}\} + \cdots + 4am + 2n + 1] \\ &= 2[\text{偶数} + 1] \end{aligned}$$

となり、 $n = 2m + 1$ の基数なら

$$\begin{aligned} x^n + y^n &= 2[2^{n-1} k^n + 2^n j^n + {}_n C_1 \{2^{n-2} k^{n-1} + 2^{n-2} j^{n-1}\} + \cdots + (2m+1)(2a+1) + 1] \\ &= 2[2^{n-1} k^n + 2^n j^n + {}_n C_1 \{2^{n-2} k^{n-1} + 2^{n-2} j^{n-1}\} + \cdots + 4am + 2(a+m) + 2] \\ &= 4[2^{n-1} k^n + 2(n-1)j^n + {}_n C_1 \{2^{n-2} k^{n-1} + 2^{n-2} j^{n-1}\} + \cdots + 2am + a + m + 1] \end{aligned}$$

ここで a, m が奇数同士、偶数同士なら

$$\begin{aligned} x^n + y^n &= 4[2^{n-1} k^n + 2(n-1)j^n + {}_n C_1 \{2^{n-2} k^{n-1} + 2^{n-2} j^{n-1}\} + \cdots + 2am + a + m + 1] \\ &= 4[\text{偶数} + 1] \end{aligned}$$

ここで a, m が一方が奇数、もう一方が偶数なら

$$x^n + y^n = 4[2^{n-1}k^n + 2(n-1)j^n + {}_n C_1\{2^{n-2}k^{n-1} + 2^{n-2}j^{n-1}\} + \cdots + 2am + a + m + 1]$$

$$x^n + y^n = 4[\text{偶数} + 1]$$

左辺 $x^n + y^n = 2(\text{偶数} + 1) = 2 \times \text{奇数}$ 。あるいは、 $x^n + y^n = 4(\text{偶数} + 1) = 4 \times \text{奇数}$ 。一方、右辺 $= z^3 = (2l)^n$ より、 $2 \times \text{奇数} = 2^n l^n$ よって、 $\text{奇数} = 2^{n-1} l^n = \text{偶数}$ または $\text{奇数} = 2^{n-2} l^n = \text{偶数}$ で矛盾。

2 x : 奇数, y : 偶数, z : 奇数の場合

$x = 2k - 1, y = 2j, z = 2l + 1$ と置くと、

$$y^n = z^n - x^n$$

$$\text{左辺} = (2l + 1)^n - (2k - 1)^n$$

二項定理より

$$(2l + 1)^n = (2l)^n + {}_n C_1(2l)^{n-1} + {}_n C_2(2l)^{n-2} + \cdots + {}_n C_{n-(n-1)}(2l) + 1$$

二項定理より

$$(2k - 1)^n = (2k)^n(-1)^0 + {}_n C_1(2k)^{n-1}(-1)^1 + \cdots + {}_n C_{n-(n-1)}(2k)(-1)^{n-1} + (-1)^n$$

2.1 $n = 2m$ つまり偶数の時

$n = 2m$ つまり偶数の時、

$$(2l+1)^n - (2k-1)^n = (2l)^n - (2k)^n + {}_n C_1\{(2l)^{n-1} + (2k)^{n-1}\} + \cdots + {}_n C_{n-(n-1)}\{(2l) + (2k)\} + 1 - 1$$

$$(2l + 1)^n - (2k - 1)^n = (2l)^n - (2k)^n + {}_n C_1\{(2l)^{n-1} + (2k)^{n-1}\} + \cdots + 2m\{(2l) + (2k)\}$$

$$(2l + 1)^n - (2k - 1)^n = 4[2^{n-2}l^n - 2^{n-2}k^n + \cdots + m(m-1)\{2^{2-2}l^2 - 2^{2-2}k^2\} + m\{(l+k)\}]$$

$$(2l + 1)^n - (2k - 1)^n = 4[2^{n-2}l^n - 2^{n-2}k^n + \cdots + m(m-1)(l^2 - k^2) + m\{(l+k)\}]$$

2.1.1 $m(l+k) = 2a+1$ が奇数の時

$m(l+k) = 2a+1$ が奇数の時、 m : 奇数、 $l+k$: 奇数 なので l, k は奇数と偶数が偶数と奇数である。

$$(2l+1)^n - (2k-1)^n = 4[2^{n-2}l^n - 2^{n-2}k^n + {}_n C_1\{2^{n-3}l^{n-1} + 2^{n-3}k^{n-1}\} + \cdots + m(m+1)(l^2 - k^2) + 2a+1]$$

$$(2l+1)^n - (2k-1)^n = 4[2^{n-2}l^n - 2^{n-2}k^n + {}_n C_1\{2^{n-3}l^{n-1} + 2^{n-3}k^{n-1}\} + \cdots + m(m+1)(l+k)(l-k) + 2a+1]$$

$$(2l+1)^n - (2k-1)^n = 4[2^{n-2}l^n - 2^{n-2}k^n + {}_n C_1 \{2^{n-3}l^{n-1} + 2^{n-3}k^{n-1}\} + \dots + (m+1)(l-k)(2a+1) + 2a+1]$$

$$(2l+1)^n - (2k-1)^n = 4[2^{n-2}l^n - 2^{n-2}k^n + {}_n C_1 \{2^{n-3}l^{n-1} + 2^{n-3}k^{n-1}\} + \dots + (2a+1)\{(m+1)(l-k)+1\}]$$

$$(2l+1)^n - (2k-1)^n = 4[2^{n-2}l^n - 2^{n-2}k^n + \dots + 2a\{(m+1)(l-k)+1\} + \{(m+1)(l-k)+1\}]$$

$m+1$ は偶数であるから

$$(2l+1)^n - (2k-1)^n = 4[\text{偶数} + 1]$$

左辺 $z^n - x^n = 4(\text{偶数} + 1) = 4 \times \text{奇数}$ 。一方、右辺 $= y^n = (2j)^n$ より、 $4 \times \text{奇数} = 2^n j^n$ よって、 $\text{奇数} = 2^{n-2} j^n = \text{偶数}$ で矛盾。

2.1.2 $m(l+k) = 2a$ が偶数の時

$m(l+k) = 2a$ が偶数の時、 m : 偶数 か $l+k$ が偶数である。 $l+k$ が偶数ならば、 l, k は偶数同士か奇数同士である。

$$(2l+1)^n - (2k-1)^n = 4[2^{n-2}l^n - 2^{n-2}k^n + {}_n C_1 \{2^{n-3}l^{n-1} + 2^{n-3}k^{n-1}\} + \dots + m(m+1)(l+k)(l-k) + 2a]$$

$m(l+k) = 2a$ であるから、

$$(2l+1)^n - (2k-1)^n = 4[2^{n-2}l^n - 2^{n-2}k^n + {}_n C_1 \{2^{n-3}l^{n-1} + 2^{n-3}k^{n-1}\} + \dots + (m+1)(l-k)2a + 2a]$$

$$(2l+1)^n - (2k-1)^n = 4[2^{n-2}l^n - 2^{n-2}k^n + 2^{n-3}l^{n-1} + 2^{n-3}k^{n-1} + \dots + 2a\{(m+1)(l-k)+1\}]$$

m が奇数なら、 $m+1$ は偶数であり、 $l-k$ は偶数同士か奇数同士であるので、 $l-k$ も偶数である。

2.2 $n = 2m + 1$ つまり奇数の時

$n = 2m + 1$ つまり奇数の時、

$$(2k-1)^n = (2k)^n (-1)^0 + {}_n C_1 (2k)^{n-1} (-1)^1 + \dots + {}_n C_{n-(n-1)} (2k) (-1)^{n-1} + (-1)^n$$

$$(2k-1)^{2m+1} = (2k)^{2m+1} (-1)^0 + {}_{2m+1} C_1 (2k)^{2m+1-1} (-1)^1 + \dots + {}_{2m+1} C_{2m+1-(2m+1-1)} (2k) (-1)^{2m+1-1} + (-1)^{2m+1}$$

$$(2k-1)^{2m+1} = (2k)^{2m+1} (-1)^0 + {}_{2m+1} C_1 (2k)^{2m} (-1)^1 + \dots + {}_{2m+1} C_1 (2k) (-1)^{2m} + (-1)^{2m+1}$$

$$(2k-1)^{2m+1} = (2k)^{2m+1} (-1)^0 + {}_{2m+1} C_1 (2k)^{2m} (-1)^1 + \dots + {}_{2m+1} C_1 (2k) - 1$$

$$(2k-1)^{2m+1} = (2k)^{2m+1} (-1)^0 - {}_{2m+1} C_1 (2k)^{2m} + \dots + 2k(2m+1) - 1$$

より、

$$(2l+1)^{2m+1} - (2k-1)^{2m+1} = (2l)^{2m+1} - (2k)^{2m+1} + {}_n C_1 \{(2l)^{2m+1-1} + (2k)^{2m}\} + \dots + {}_{2m+1} C_{2m+1-(2m+1-1)} \{(2l) - (2k)\}$$

$$(2l+1)^{2m+1} - (2k-1)^{2m+1} = (2l)^{2m+1} - (2k)^{2m+1} + {}_{2m+1} C_1 \{(2l)^{2m} + (2k)^{2m}\} + \dots + (2m+1)2(l-k) + 2$$

$$(2l+1)^{2m+1} - (2k-1)^{2m+1} = (2l)^{2m+1} - (2k)^{2m+1} + {}_{2m+1} C_1 \{(2l)^{2m} + (2k)^{2m}\} + \dots + 2(2m+1)(l-k) + 2$$

2.2.1 $(l - k) = 2a$ が偶数の時

$(l - k) = 2a$ が偶数の時、

$$(2l + 1)^n - (2k - 1)^n = 2 \times (\text{偶数} + 1)$$

左辺 $z^n - x^n = 2(\text{偶数} + 1) = 2 \times \text{奇数}$ 。一方、右辺 $= y^n = (2j)^n$ より、 $2 \times \text{奇数} = 2^n j^n$ よって、 $\text{奇数} = 2^{n-1} j^n = \text{偶数}$ で矛盾。

2.2.2 $(l - k) = 2a + 1$ が奇数の時

$(l - k) = 2a + 1$ が奇数の時、

$$(2l + 1)^n - (2k - 1)^n = 2 \times (\text{偶数} + 1)$$

左辺 $z^n - x^n = 2(\text{偶数} + 1) = 2 \times \text{奇数}$ 。一方、右辺 $= y^n = (2j)^n$ より、 $2 \times \text{奇数} = 2^n j^n$ よって、 $\text{奇数} = 2^{n-1} j^n = \text{偶数}$ で矛盾。