

フェルマーの最終定理の証明

愛犬ベルのために

最新 2021 年 3 月 19 日

はじめに

これは、BBS「数の不思議世界」で、中年 A 様と議論しながら、完成したものです。オイラーとは違った手法で、構成されています。なお、連立方程式の解法に数式処理ソフト maxima を使いました。

更新履歴

- 2021.3.12 新規作成
- 2021.3.13 修正
- 2021.3.15 修正
- 2021.3.16 修正
- 2021.3.17 修正
- 2021.3.19 修正

1 フェルマーの最終定理 n=3 の場合

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = c^3 \quad \text{ただし } a, b, c \text{ は自然数で互いに素であるとする。 (1)}$$

この (1) において、 $c = xy$ (ただし x, y は自然数) とし、

- $a + b = 1 \quad a^2 - ab + b^2 = x^3 y^3$
- $a + b = x^3 y^3 \quad a^2 - ab + b^2 = 1$
- $a + b = xy \quad a^2 - ab + b^2 = x^2 y^2$
- $a + b = x^2 y \quad a^2 - ab + b^2 = xy^2$
- $a + b = x^2 y^2 \quad a^2 - ab + b^2 = xy$
- $a + b = x^2 y^3 \quad a^2 - ab + b^2 = x$
- $a + b = xy^3 \quad a^2 - ab + b^2 = x^2$

- $a + b = x \quad a^2 - ab + b^2 = x^2y^3$
- $a + b = x^2 \quad a^2 - ab + b^2 = xy^3$
- $a + b = x^3 \quad a^2 - ab + b^2 = y^3$

について、検討するものである。 x, y の入れ替えても内容的に同じものは除いてある。背理法をもちいる。(1) が成り立つものとする。

1.1 $a + b = 1 \quad a^2 - ab + b^2 = x^3y^3$ の場合

$a + b = 1$ は、 a, b は自然数より、ありえない。よって、(1) は、成り立たない。

1.2 $a + b = x^3y^3 \quad a^2 - ab + b^2 = 1$ の場合

$$a^2 - ab + b^2 = (a - b)^2 + ab$$

ここで、 a, b は自然数より、

$$a^2 - ab + b^2 = (a - b)^2 + ab \geq 1$$

よって、 $a^2 - ab + b^2 = 1$ は、等号が成り立つときであり、 $a = b = 1$ このとき、(1) は、成り立たない。

1.3 $a + b = xy \quad a^2 - ab + b^2 = x^2y^2$ の場合

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = x^2y^2$$

また、

$$a^2 - ab + b^2 = x^2y^2$$

より、これら 2 つの式を引いて、

$$3ab = 0$$

よって、 a, b のいずれかが 0 であるが、 a, b は自然数により、矛盾。故に、(1) は、成り立たない。

1.4 $a + b = x^2y$ $a^2 - ab + b^2 = xy^2$ の場合

連立方程式

$$\begin{cases} a + b = x^2y \\ a^2 - ab + b^2 = xy^2 \end{cases} \quad (2)$$

を解くと、

$$a = \frac{3x^2y - \sqrt{3xy^2(4 - x^3)}}{6}, b = \frac{3x^2y + \sqrt{3xy^2(4 - x^3)}}{6}$$
$$a = \frac{3x^2y + \sqrt{3xy^2(4 - x^3)}}{6}, b = \frac{3x^2y - \sqrt{3xy^2(4 - x^3)}}{6}$$

これより、 $4 - x^3 \geq 0$ でなければならない。 x, y は自然数なので、 $x = 1$ である。

$$\begin{cases} a + b = y \\ a^2 - ab + b^2 = y^2 \end{cases} \quad (3)$$

これより、

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = y^2$$

また、

$$a^2 - ab + b^2 = y^2$$

これら 2 つの式を引いて、

$$3ab = 0$$

したがって、 a, b のいずれかは、 0 である。しかしながら、 a, b は自然数。矛盾。よって、 (1) は、成り立たない。

1.5 $a + b = x^2y^2$ $a^2 - ab + b^2 = xy$ の場合

連立方程式

$$\begin{cases} a + b = x^2y^2 \\ a^2 - ab + b^2 = xy \end{cases} \quad (4)$$

を解くと、

$$a = \frac{3x^2y^2 - \sqrt{3xy(4 - x^3y^3)}}{6}, b = \frac{3x^2y^2 + \sqrt{3xy(4 - x^3y^3)}}{6}$$
$$a = \frac{3x^2y^2 + \sqrt{3xy(4 - x^3y^3)}}{6}, b = \frac{3x^2y^2 - \sqrt{3xy(4 - x^3y^3)}}{6}$$

これより、 $4 - x^3y^3 \geq 0$ でなければならない。 x, y は自然数なので、 $x = y = 1$ である。
ゆえに、

$$a^3 + b^3 = x^3y^3 = 1$$

ここで、 a, b, x, y は自然数。矛盾。よって、 (1) は、成り立たない。

1.6 $a + b = x^2y^3$ $a^2 - ab + b^2 = x$ の場合

連立方程式

$$\begin{cases} a + b = x^2y^3 \\ a^2 - ab + b^2 = x \end{cases} \quad (5)$$

を解くと、

$$a = \frac{3x^2y^3 - \sqrt{3x(4 - x^3y^6)}}{6}, b = \frac{3x^2y^3 + \sqrt{3x(4 - x^3y^6)}}{6}$$
$$a = \frac{3x^2y^3 + \sqrt{3x(4 - x^3y^6)}}{6}, b = \frac{3x^2y^3 - \sqrt{3x(4 - x^3y^6)}}{6}$$

これより、 $4 - x^3y^6 \geq 0$ でなければならない。 x, y は自然数なので、 $x = y = 1$ である。ゆえに、

$$a^3 + b^3 = x^3y^3 = 1$$

ここで、 a, b, x, y は自然数。矛盾。よって、(1) は、成り立たない。

1.7 $a + b = xy^3$ $a^2 - ab + b^2 = x^2$ の場合

連立方程式

$$\begin{cases} a + b = xy^3 \\ a^2 - ab + b^2 = x^2 \end{cases} \quad (6)$$

を解くと、

$$a = \frac{3xy^3 - \sqrt{3x^2(4 - y^6)}}{6}, b = \frac{3xy^3 + \sqrt{3x^2(4 - y^6)}}{6}$$
$$a = \frac{3xy^3 + \sqrt{3x^2(4 - y^6)}}{6}, b = \frac{3xy^3 - \sqrt{3x^2(4 - y^6)}}{6}$$

これより、 $4 - y^6 \geq 0$ でなければならない。 x, y は自然数なので、 $y = 1$ である。

$$\begin{cases} a + b = x \\ a^2 - ab + b^2 = x^2 \end{cases} \quad (7)$$

これより、

$$(a + b)^2 = a^2 + ab + b^2 = x^2$$

また、

$$a^2 - ab + b^2 = x^2$$

これら2つの式の引いて

$$3ab = 0$$

したがって、 a, b のいずれかは、0 である。しかしながら、 a, b は自然数。矛盾。よって、(1) は、成り立たない。

1.8 $a + b = x$ $a^2 - ab + b^2 = x^2y^3$ の場合

連立方程式

$$\begin{cases} a + b = x \\ a^2 - ab + b^2 = x^2y^3 \end{cases} \quad (8)$$

より、

$$a^2 - ab + b^2 = (a + b)^2 - 3ab$$

$$x^2y^3 = x^2 - 3ab$$

$$x^2(1 - y^3) = 3ab$$

ここで、 a, b, x, y は自然数。ゆえに、

$$1 - y^3 > 0$$

矛盾。よって、(1) は、成り立たない。

1.9 $a + b = x^2$ $a^2 - ab + b^2 = xy^3$ の場合

連立方程式

$$\begin{cases} a + b = x^2 \\ a^2 - ab + b^2 = xy^3 \end{cases} \quad (9)$$

さて、

$$a + b = x^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = x^4$$

また、

$$a^2 - ab + b^2 = xy^3$$

この2つを引いて、

$$3ab = x^4 - xy^3$$

$$3ab = x(x^3 - y^3)$$

a, b は自然数であるから、

$$x^3 - y^3 > 0$$

$$x^3 > y^3$$

両辺に y^3 をかけて、

$$x^3y^3 > y^6$$

$$c^3 = (a^3 + b^3) = x^3y^3 > y^6 \text{ ----- (ア)}$$

さて、

$$a + b = x^2 = c^2/y^2$$

よって、

$$h(a, b) > g(a, b) > f(a, b) > 0$$

ゆえに、

$$a^3 + b^3 < c^3$$

矛盾。よって、(1) は、成り立たない。

1.10 $a + b = x^3$ $a^2 - ab + b^2 = y^3$ の場合

連立方程式

$$\begin{cases} a + b = x^3 \\ a^2 - ab + b^2 = y^3 \end{cases} \quad (10)$$

さて、

$$\begin{aligned} a + b &= x^3 \\ (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 = x^6 \end{aligned}$$

また、

$$a^2 - ab + b^2 = y^3$$

この2つを引いて、

$$3ab = x^6 - y^3$$

a, b は自然数であるから、

$$\begin{aligned} x^6 - y^3 &> 0 \\ x^6 &> y^3 \end{aligned}$$

両辺に y^6 をかけて、

$$\begin{aligned} x^6 y^6 &> y^9 \\ c^6 = (a^3 + b^3)^2 &= x^6 y^6 > y^9 \text{ ----- (ア)} \end{aligned}$$

さて、

$$\begin{aligned} a + b &= x^3 = c^3 / y^3 \\ (a + b)y^3 &= c^3 \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= c^3 \\ a^3 + b^3 &= (a + b)y^3 \end{aligned}$$

両辺を3乗して、

$$(a^3 + b^3)^3 = (a + b)^3 y^9$$

そこで、

$$f(a, b) = (a + b)^3 y^9 - (a^3 + b^3)^3$$

そこで、

$$f(a, b) = (a + b)^3 y^9 - (a^3 + b^3)^3$$
$$f(a, b) = y^9 \{(a + b)^3 - (a^3 + b^3)\} \{(a^3 + b^3)^2 / y^9\} \text{----- (イ)}$$

また、

$$g(a, b) = (a + b)^3 y^9 - (a^3 + b^3) y^9$$
$$g(a, b) = y^9 \{(a + b)^3 - (a^3 + b^3)\} \text{----- (ウ)}$$
$$g(a, b) = y^9 \{3ab(a + b)\} > 0$$

(イ) より、 $(a^3 + b^3)^2 > y^9$ なので、(イ)、(ウ) から、

$$f(a, b) < g(a, b)$$

また、(イ)、(ウ) と $a + b > 0$ と $a^3 + b^3 > 0$ と $g(a, b) > 0$ から、 $g(a, b) > f(a, b) > 0$ である。さらに、

$$h(a, b) = (a + b)^3 (a^3 + b^3)^2 - (a^3 + b^3)^3$$
$$h(a, b) = (a^3 + b^3)^2 \{(a + b)^3 - (a^3 + b^3)\} \text{----- (エ)}$$
$$h(a, b) = (a^3 + b^3)^2 \{3ab(a + b)\}$$

また、

$$f(a, b) = (a + b)^3 y^9 - (a^3 + b^3)^3$$
$$f(a, b) = (a^3 + b^3)^2 \{(a + b)^3 \{y^9 / (a^3 + b^3)^2\} - (a^3 + b^3)\} \text{----- (オ)}$$

(ア) より、 $(a^3 + b^3)^2 > y^9$ なので、(エ)、(オ) から、

$$h(a, b) > f(a, b)$$

(ア) より、 $(a^3 + b^3)^2 > y^9$ なので、

$$h(a, b) > g(a, b)$$

よって、

$$h(a, b) > g(a, b) > f(a, b) > 0$$

ゆえに、

$$a^3 + b^3 < c^3$$

矛盾。よって、(1) は、成り立たない。

よって、 $n = 3$ のときのフェルマーの最終定理が証明された。