

# フェルマーの最終定理の証明

愛犬ベルのために

最新 2021 年 3 月 19 日

## はじめに

これは、BBS「数の不思議世界」で、中年 A 様と議論しながら、完成したものです。オイラーとは違った手法で、構成されています。なお、連立方程式の解法に数式処理ソフト maxima を使いました。

### 更新履歴

- 2021.3.12 新規作成
- 2021.3.13 修正
- 2021.3.15 修正
- 2021.3.16 修正
- 2021.3.17 修正
- 2021.3.19 修正

## 1 フェルマーの最終定理 n=3 の場合

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = c^3 \quad \text{ただし } a, b, c \text{ は自然数で互いに素であるとする。 (1)}$$

この (1) において、 $c = xy$  (ただし  $x, y$  は自然数) とし、

- $a + b = 1 \quad a^2 - ab + b^2 = x^3 y^3$
- $a + b = x^3 y^3 \quad a^2 - ab + b^2 = 1$
- $a + b = xy \quad a^2 - ab + b^2 = x^2 y^2$
- $a + b = x^2 y \quad a^2 - ab + b^2 = xy^2$
- $a + b = x^2 y^2 \quad a^2 - ab + b^2 = xy$
- $a + b = x^2 y^3 \quad a^2 - ab + b^2 = x$
- $a + b = xy^3 \quad a^2 - ab + b^2 = x^2$

- $a + b = x \quad a^2 - ab + b^2 = x^2y^3$
- $a + b = x^2 \quad a^2 - ab + b^2 = xy^3$
- $a + b = x^3 \quad a^2 - ab + b^2 = y^3$

について、検討するものである。 $x, y$  の入れ替えても内容的に同じものは除いてある。背理法をもちいる。(1) が成り立つものとする。

### 1.1 $a + b = 1 \quad a^2 - ab + b^2 = x^3y^3$ の場合

$a + b = 1$  は、 $a, b$  は自然数より、ありえない。よって、(1) は、成り立たない。

### 1.2 $a + b = x^3y^3 \quad a^2 - ab + b^2 = 1$ の場合

$$a^2 - ab + b^2 = (a - b)^2 + ab$$

ここで、 $a, b$  は自然数より、

$$a^2 - ab + b^2 = (a - b)^2 + ab \geq 1$$

よって、 $a^2 - ab + b^2 = 1$  は、等号が成り立つときであり、 $a = b = 1$  このとき、(1) は、成り立たない。

### 1.3 $a + b = xy \quad a^2 - ab + b^2 = x^2y^2$ の場合

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = x^2y^2$$

また、

$$a^2 - ab + b^2 = x^2y^2$$

より、これら 2 つの式を引いて、

$$3ab = 0$$

よって、 $a, b$  のいずれかが 0 であるが、 $a, b$  は自然数により、矛盾。故に、(1) は、成り立たない。

1.4  $a + b = x^2y$   $a^2 - ab + b^2 = xy^2$  の場合

連立方程式

$$\begin{cases} a + b = x^2y \\ a^2 - ab + b^2 = xy^2 \end{cases} \quad (2)$$

を解くと、

$$a = \frac{3x^2y - \sqrt{3xy^2(4 - x^3)}}{6}, b = \frac{3x^2y + \sqrt{3xy^2(4 - x^3)}}{6}$$

$$a = \frac{3x^2y + \sqrt{3xy^2(4 - x^3)}}{6}, b = \frac{3x^2y - \sqrt{3xy^2(4 - x^3)}}{6}$$

これより、 $4 - x^3 \geq 0$  でなければならない。  $x, y$  は自然数なので、  $x = 1$  である。

$$\begin{cases} a + b = y \\ a^2 - ab + b^2 = y^2 \end{cases} \quad (3)$$

これより、

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = y^2$$

また、

$$a^2 - ab + b^2 = y^2$$

これら 2 つの式を引いて、

$$3ab = 0$$

したがって、  $a, b$  のいずれかは、 0 である。しかしながら、  $a, b$  は自然数。矛盾。よって、 (1) は、成り立たない。

1.5  $a + b = x^2y^2$   $a^2 - ab + b^2 = xy$  の場合

連立方程式

$$\begin{cases} a + b = x^2y^2 \\ a^2 - ab + b^2 = xy \end{cases} \quad (4)$$

を解くと、

$$a = \frac{3x^2y^2 - \sqrt{3xy(4 - x^3y^3)}}{6}, b = \frac{3x^2y^2 + \sqrt{3xy(4 - x^3y^3)}}{6}$$

$$a = \frac{3x^2y^2 + \sqrt{3xy(4 - x^3y^3)}}{6}, b = \frac{3x^2y^2 - \sqrt{3xy(4 - x^3y^3)}}{6}$$

これより、  $4 - x^3y^3 \geq 0$  でなければならない。  $x, y$  は自然数なので、  $x = y = 1$  である。ゆえに、

$$a^3 + b^3 = x^3y^3 = 1$$

ここで、  $a, b, x, y$  は自然数。矛盾。よって、 (1) は、成り立たない。

1.6  $a + b = x^2y^3$   $a^2 - ab + b^2 = x$  の場合

連立方程式

$$\begin{cases} a + b = x^2y^3 \\ a^2 - ab + b^2 = x \end{cases} \quad (5)$$

を解くと、

$$a = \frac{3x^2y^3 - \sqrt{3x(4 - x^3y^6)}}{6}, b = \frac{3x^2y^3 + \sqrt{3x(4 - x^3y^6)}}{6}$$

$$a = \frac{3x^2y^3 + \sqrt{3x(4 - x^3y^6)}}{6}, b = \frac{3x^2y^3 - \sqrt{3x(4 - x^3y^6)}}{6}$$

これより、 $4 - x^3y^6 \geq 0$  でなければならない。  $x, y$  は自然数なので、  $x = y = 1$  である。ゆえに、

$$a^3 + b^3 = x^3y^3 = 1$$

ここで、  $a, b, x, y$  は自然数。矛盾。よって、(1) は、成り立たない。

1.7  $a + b = xy^3$   $a^2 - ab + b^2 = x^2$  の場合

連立方程式

$$\begin{cases} a + b = xy^3 \\ a^2 - ab + b^2 = x^2 \end{cases} \quad (6)$$

を解くと、

$$a = \frac{3xy^3 - \sqrt{3x^2(4 - y^6)}}{6}, b = \frac{3xy^3 + \sqrt{3x^2(4 - y^6)}}{6}$$

$$a = \frac{3xy^3 + \sqrt{3x^2(4 - y^6)}}{6}, b = \frac{3xy^3 - \sqrt{3x^2(4 - y^6)}}{6}$$

これより、  $4 - y^6 \geq 0$  でなければならない。  $x, y$  は自然数なので、  $y = 1$  である。

$$\begin{cases} a + b = x \\ a^2 - ab + b^2 = x^2 \end{cases} \quad (7)$$

これより、

$$(a + b)^2 = a^2 + ab + b^2 = x^2$$

また、

$$a^2 - ab + b^2 = x^2$$

これら 2 つの式の引いて

$$3ab = 0$$

したがって、  $a, b$  のいずれかは、 0 である。しかしながら、  $a, b$  は自然数。矛盾。よって、(1) は、成り立たない。

1.8  $a + b = x$   $a^2 - ab + b^2 = x^2y^3$  の場合

連立方程式

$$\begin{cases} a + b = x \\ a^2 - ab + b^2 = x^2y^3 \end{cases} \quad (8)$$

より、

$$a^2 - ab + b^2 = (a + b)^2 - 3ab$$

$$x^2y^3 = x^2 - 3ab$$

$$x^2(1 - y^3) = 3ab$$

ここで、 $a, b, x, y$  は自然数。ゆえに、

$$1 - y^3 > 0$$

矛盾。よって、(1) は、成り立たない。

1.9  $a + b = x^2$   $a^2 - ab + b^2 = xy^3$  の場合

連立方程式

$$\begin{cases} a + b = x^2 \\ a^2 - ab + b^2 = xy^3 \end{cases} \quad (9)$$

さて、

$$a + b = x^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = x^4$$

また、

$$a^2 - ab + b^2 = xy^3$$

この2つを引いて、

$$3ab = x^4 - xy^3$$

$$3ab = x(x^3 - y^3)$$

$a, b$  は自然数であるから、

$$x^3 - y^3 > 0$$

$$x^3 > y^3$$

両辺に  $y^3$  をかけて、

$$x^3y^3 > y^6$$

$$c^3 = (a^3 + b^3) = x^3y^3 > y^6 \text{ ----- (ア)}$$

さて、

$$a + b = x^2 = c^2/y^2$$

$$(a+b)y^2 = c^2$$

$$\{(a+b)y^2\}^{1/2} = c$$

また、

$$a^3 + b^3 = c^3$$

$$a^3 + b^3 = (\{(a+b)y^2\}^{1/2})^3$$

両辺を2乗して、

$$(a^3 + b^3)^2 = (\{(a+b)y^2\}^{1/2})^3)^2$$

$$(a^3 + b^3)^2 = (\{(a+b)y^2\}^{1/2})^2)^3$$

$$(a^3 + b^3)^2 = \{(a+b)y^2\}^3$$

$$(a^3 + b^3)^2 = (a+b)^3 y^6$$

そこで、

$$f(a, b) = (a+b)^3 y^6 - (a^3 + b^3)^2$$

$$f(a, b) = y^6 \{(a+b)^3 - (a^3 + b^3)\} - \dots - \dots - \dots - \dots - \dots \quad (\text{イ})$$

また、

$$g(a, b) = (a+b)^3 y^6 - (a^3 + b^3) y^6$$

$$g(a, b) = y^6 \{(a+b)^3 - (a^3 + b^3)\} - \dots - \dots - \dots - \dots - \dots \quad (\text{ウ})$$

$$g(a, b) = y^6 \{3ab(a+b) > 0\}$$

(ア) より、 $(a^3 + b^3) > y^6$  なので、(イ)、(ウ) から

$$f(a, b) < g(a, b)$$

また、(イ)、(ウ) と  $a+b > 0$  と  $a^3 + b^3 > 0$  と  $g(a, b) > 0$  から、 $g(a, b) > f(a, b) > 0$  である。さらに、

$$h(a, b) = (a+b)^3 (a^3 + b^3) - (a^3 + b^3)^2$$

$$h(a, b) = (a^3 + b^3) \{(a+b)^3 - (a^3 + b^3)\} - \dots - \dots - \dots - \dots - \dots \quad (\text{エ})$$

$$h(a, b) = (a^3 + b^3) \{3ab(a+b)\}$$

また、

$$f(a, b) = (a+b)^3 y^6 - (a^3 + b^3)^2$$

$$f(a, b) = (a^3 + b^3) \{(a+b)^3 \{y^6 / (a^3 + b^3)\} - (a^3 + b^3)\} - \dots - \dots - \dots - \dots - \dots \quad (\text{オ})$$

(ア) より、 $(a^3 + b^3) > y^6$  なので、(エ)、(オ) から

$$h(a, b) > f(a, b)$$

(ア) より、 $(a^3 + b^3) > y^6$  なので、

$$h(a, b) > g(a, b)$$

よって、

$$h(a, b) > g(a, b) > f(a, b) > 0$$

ゆえに、

$$a^3 + b^3 < c^3$$

矛盾。よって、(1) は、成り立たない。

### 1.10 $a + b = x^3$ $a^2 - ab + b^2 = y^3$ の場合

連立方程式

$$\begin{cases} a + b = x^3 \\ a^2 - ab + b^2 = y^3 \end{cases} \quad (10)$$

さて、

$$\begin{aligned} a + b &= x^3 \\ (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 = x^6 \end{aligned}$$

また、

$$a^2 - ab + b^2 = y^3$$

この2つを引いて、

$$3ab = x^6 - y^3$$

$a, b$  は自然数であるから、

$$\begin{aligned} x^6 - y^3 &> 0 \\ x^6 &> y^3 \end{aligned}$$

両辺に  $y^6$  をかけて、

$$\begin{aligned} x^6 y^6 &> y^9 \\ c^6 = (a^3 + b^3)^2 = x^6 y^6 &> y^9 \text{ ----- (ア)} \end{aligned}$$

さて、

$$\begin{aligned} a + b &= x^3 = c^3 / y^3 \\ (a + b)y^3 &= c^3 \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= c^3 \\ a^3 + b^3 &= (a + b)y^3 \end{aligned}$$

両辺を3乗して、

$$(a^3 + b^3)^3 = (a + b)^3 y^9$$

そこで、

$$f(a, b) = (a + b)^3 y^9 - (a^3 + b^3)^3$$

そこで、

$$f(a, b) = (a + b)^3 y^9 - (a^3 + b^3)^3$$
$$f(a, b) = y^9 \{(a + b)^3 - (a^3 + b^3)\} \{(a^3 + b^3)^2 / y^9\} \text{----- (イ)}$$

また、

$$g(a, b) = (a + b)^3 y^9 - (a^3 + b^3) y^9$$
$$g(a, b) = y^9 \{(a + b)^3 - (a^3 + b^3)\} \text{----- (ウ)}$$
$$g(a, b) = y^9 \{3ab(a + b)\} > 0$$

(イ) より、 $(a^3 + b^3)^2 > y^9$  なので、(イ)、(ウ) から、

$$f(a, b) < g(a, b)$$

また、(イ)、(ウ) と  $a + b > 0$  と  $a^3 + b^3 > 0$  と  $g(a, b) > 0$  から、 $g(a, b) > f(a, b) > 0$  である。さらに、

$$h(a, b) = (a + b)^3 (a^3 + b^3)^2 - (a^3 + b^3)^3$$
$$h(a, b) = (a^3 + b^3)^2 \{(a + b)^3 - (a^3 + b^3)\} \text{----- (エ)}$$
$$h(a, b) = (a^3 + b^3)^2 \{3ab(a + b)\}$$

また、

$$f(a, b) = (a + b)^3 y^9 - (a^3 + b^3)^3$$
$$f(a, b) = (a^3 + b^3)^2 \{(a + b)^3 \{y^9 / (a^3 + b^3)^2\} - (a^3 + b^3)\} \text{----- (オ)}$$

(ア) より、 $(a^3 + b^3)^2 > y^9$  なので、(エ)、(オ) から、

$$h(a, b) > f(a, b)$$

(ア) より、 $(a^3 + b^3)^2 > y^9$  なので、

$$h(a, b) > g(a, b)$$

よって、

$$h(a, b) > g(a, b) > f(a, b) > 0$$

ゆえに、

$$a^3 + b^3 < c^3$$

矛盾。よって、(1) は、成り立たない。

よって、 $n = 3$  のときのフェルマーの最終定理が証明された。