

フェルマーの最終定理の証明 ($n = 3$ の場合)

愛犬ベルのために

最新 2021 年 8 月 23 日

はじめに

これは、BBS「数の不思議世界」で、壊れた扉さんとの議論によってできたものです。

更新履歴

2021.8.8 新規作成

2021.8.14 式 (1) の前後

2021.8.23 1.2 の 5) 2.5 の 5) の修正

1 証明の前に

1.1 基本組み合わせ

すでに、フェルマーの最終定理は $n = 3$ の場合は初等的に証明されています。

それを改めて、

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = c^3 \quad \text{ただし、} a, b, c \text{ はお互い素なる自然数である。 (1)}$$

において、 $c = xy$ とおき、(ただし、 x, y は自然数) において、 $x < y$ としても一般性を失わない。

- i. $a + b = 1$, $a^2 - ab + b^2 = x^3y^3$
- ii. $a + b = x^3y^3$, $a^2 - ab + b^2 = 1$
- iii. $a + b = xy$, $a^2 - ab + b^2 = x^2y^2$
- iv. $a + b = x^2y$, $a^2 - ab + b^2 = xy^2$
- v. $a + b = x^2y^2$, $a^2 - ab + b^2 = xy$
- vi. $a + b = x^2y^3$, $a^2 - ab + b^2 = x$
- vii. $a + b = xy^3$, $a^2 - ab + b^2 = x^2$

viii. $a + b = x$, $a^2 - ab + b^2 = x^2y^3$

ix. $a + b = x^2$, $a^2 - ab + b^2 = xy^3$

x. $a + b = x^3$, $a^2 - ab + b^2 = y^3$

の10通りが考えられる。

1.2 $f(a, b) < g(a, b)$

ここで、 $f(a, b) < g(a, b)$ とし、 $a^3 + b^3 = c^3 = f(a, b)g(a, b)$ とする。

すると、

1)

$$a + b = 1 \quad , \quad a^2 - ab + b^2 = x^3y^3$$

$$a + b = x^3y^3 \quad , \quad a^2 - ab + b^2 = 1$$

は、

$$f(a, b) = 1, g(a, b) = x^3y^3$$

となる。

2)

$$a + b = xy \quad , \quad a^2 - ab + b^2 = x^2y^2$$

$$a + b = x^2y^2 \quad , \quad a^2 - ab + b^2 = xy$$

は、

$$f(a, b) = xy, g(a, b) = x^2y^2$$

となる。

3)

$$a + b = x \quad , \quad a^2 - ab + b^2 = x^2y^3$$

$$a + b = x^2y^3 \quad , \quad a^2 - ab + b^2 = x$$

は、

$$f(a, b) = x, g(a, b) = x^2y^3$$

となる。

4)

$$a + b = x^2, a^2 - ab + b^2 = xy^3$$

$$a + b = xy^3, a^2 - ab + b^2 = x^2$$

は、

$$f(a, b) = x^2, g(a, b) = xy^3$$

となる。

5)

$$a + b = x^2y, a^2 - ab + b^2 = xy^2$$

は、 $x < y$ より、 $f(a, b) < g(a, b)$ から、

$$f(a, b) = xy^2, g(a, b) = x^2y$$

はありえない。よって、

$$f(a, b) = x^2y, g(a, b) = xy^2$$

となる。

6)

$$a + b = x^3, a^2 - ab + b^2 = y^3$$

は、

$$f(a, b) = x^3, g(a, b) = y^3$$

となる。

1.3 証明用準備式

また、 a, b は自然数なので、 $a + b$ がいかなる値でも、

$$(a + b)^3 - (a^3 + b^3) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - (a^3 + b^3)$$

$$= 3a^2b + 3ab^2 > 0 \quad \text{ただし } a, b \text{ は自然数より}$$

より、

$$(a + b)^3 > (a^3 + b^3) \tag{2}$$

さて、 $h(a, b) = (a^3 + b^3)^2 - (a + b)^3$ であるとき、 $a = x, b = x + j$ ただし x, j は自然数とおくと、

$$h(a, b) = (a^3 + b^3)^2 - (a + b)^3 = \{x^3 + (x + j)^3\}^2 - (x + x + j)^3$$

そこで、

$$\begin{aligned} \{x^3 + (x+j)^3\}^2 &= (x^3)^2 + 2(x^3)(x+j)^3 + \{(x+j)^3\}^2 \\ &= x^6 + 2x^3(x^3 + 3x^2j + 3xj^2 + j^3) + (x+j)^6 \\ &= x^6 + 2x^6 + 6x^5j + 6x^4j^2 + 2x^3j^3 + x^6 + 6x^5j + 15x^4j^2 + 20x^3j^3 + 15x^2j^4 + 6xj^5 + j^6 \\ &= 4x^6 + 12x^5j + 21x^4j^2 + 22x^3j^3 + 15x^2j^4 + 6xj^5 + j^6 \quad \text{----- (ア)} \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} (x+x+j)^3 &= (2x+j)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2j + 3(2x)j^2 + j^3 \\ &= 8x^3 + 12x^2j + 6xj^2 + j^3 \quad \text{----- (イ)} \end{aligned}$$

よって、(ア) - (イ) は、

$$\begin{aligned} h(a,b) &= 4x^6 + 12x^5j + 21x^4j^2 + 22x^3j^3 + 15x^2j^4 + 6xj^5 + j^6 - (8x^3 + 12x^2j + 6xj^2 + j^3) \\ &= 4x^6 + 12x^5j + 21x^4j^2 + x^3(22j^3 - 8) + x^2(15j^4 - 12j) + x(6j^5 - 6j^2) + j^6 - j^3 \\ &= 4x^6 + 12x^5j + 21x^4j^2 + x^3(22j^3 - 8) + x^2j(15j^3 - 12) + xj^2(6j^3 - 6) + j^3(j^3 - 1) \\ &= 4x^6 + 12x^5j + 21x^4j^2 + 2x^3(11j^3 - 4) + 3x^2j(5j^3 - 4) + 6xj^2(j^3 - 1) + j^3(j^3 - 1) \end{aligned}$$

ここで、 x, j は自然数なので、 $1 \leq x, 1 \leq j$ より、

$$h(a,b) > 0$$

よって、

$$h(a,b) = (a^3 + b^3)^2 - (a+b)^3 > 0$$

より、

$$(a+b)^3 < (a^3 + b^3)^2 \quad (3)$$

(3) より、 $(a^3 + b^3)^2 < (a^3 + b^3)^3$ であるから

$$(a+b)^3 < (a^3 + b^3)^3 \quad (4)$$

2 証明

2.1 1) $f(a, b) = 1, g(a, b) = x^3y^3$ の場合

2.1.1 $a + b = 1$

$f(a, b) = 1$ より、 a, b は自然数であり、 $a + b = 1$ はありえない。

2.1.2 $a + b = x^3y^3$

(3) より、

$$(a + b)^3 < (a^3 + b^3)^2$$

$$(x^3y^3)^3 < (c^3)^2$$

$$x^9y^9 < x^6y^6$$

矛盾する。よって、1) は成り立たない。

2.2 2) $f(a, b) = xy, g(a, b) = x^2y^2$

2.2.1 $f(a, b) = xy$ の場合

$f(a, b) = xy$ より、 $a + b = xy = c$

(2) より、

$$(a + b)^3 > (a^3 + b^3)$$

ところで $a + b = c$

よって、

$$c^3 > (a^3 + b^3)$$

よって、 $a^3 + b^3 = c^3$ は成り立たない。

2.2.2 $a^2 - ab + b^2 = xy$ の場合

(3) より、

$$(a + b)^3 < (a^3 + b^3)^2$$

$$(c^2)^3 < (a^3 + b^3)^2$$

$$(c^3)^2 < (a^3 + b^3)^2$$

両辺の平方根をとっても不等号の向きは変わらないので、

$$(c^3) < (a^3 + b^3)$$

よって、 $a^3 + b^3 = c^3$ は成り立たない。

よって2) は、成り立たない。

2.3 3) $f(a, b) = x, g(a, b) = x^2y^3$ の場合

2.3.1 $f(a, b) = a + b = x$ の場合

$f(a, b) = a + b = x$ ならば、

$$(a + b)^3 = x^3 \quad x^3y^3 = c^3 \text{ただし、等号は } y = 1 \text{ のとき}$$

$$(a + b)^3 \quad (a^3 + b^3)$$

ところが、(2) より、矛盾。
よって 3) は、成り立たない。

2.3.2 $f(a, b) = a^2 - ab + b^2 = x, g(a, b) = a + b = x^2y^3$ の場合

(3) より、

$$(a + b)^3 < (a^3 + b^3)^2$$

ところが、

$$(a + b)^3 = x^6y^9 > x^6y^6 = c^6 = (a^3 + b^3)^2$$

$$(a + b)^3 > (a^3 + b^3)^2$$

矛盾。
よって 3) は、成り立たない。

2.4 4) $f(a, b) = x^2, g(a, b) = xy^3$

2.4.1 $f(a, b) = a + b = x^2$ の場合

(2) より、

$$(a + b)^3 > (a^3 + b^3) = c^3 = x^3y^3$$

$$x^6 > x^3y^3$$

$$x^3 > y^3$$

ところが、 $x < y$ より矛盾。
よって 4) は、成り立たない。

2.4.2 $f(a, b) = a^2 - ab + b^2 = x^2, g(a, b) = a + b = xy^3 = xy^3$ の場合

(3) より、

$$(a + b)^3 < (a^3 + b^3)^2 \quad \text{---(ウ)}$$

ところが、

$$(a + b)^3 = x^3y^9 \quad \text{---(工)}$$

$$(a^3 + b^3)^2 = (c^3)^2 = c^6 = x^6y^6 \quad \text{---(オ)}$$

x^3y^6 で (工),(オ) を割ると、

$$\frac{(a + b)^3}{x^3y^6} = y^3$$

$$\frac{(a^3 + b^3)^2}{x^3y^6} = x^3$$

よって、(ウ) より、

$$\frac{(a + b)^3}{x^3y^6} = y^3 < \frac{(a^3 + b^3)^2}{x^3y^6} = x^3$$

すなわち、

$$y^3 < x^3$$

ここで、 $x < y$ より、矛盾。

よって 4) は、成り立たない。

2.5 5) $a + b = x^2y, a^2 - ab + b^2 = xy^2$

連立方程式

$$\begin{cases} a + b = x^2y \\ a^2 - ab + b^2 = xy^2 \end{cases} \quad (5)$$

を解くと、

$$a = \frac{3x^2y - \sqrt{3xy^2(4 - x^3)}}{6}, b = \frac{3x^2y + \sqrt{3xy^2(4 - x^3)}}{6}$$

$$a = \frac{3x^2y + \sqrt{3xy^2(4 - x^3)}}{6}, b = \frac{3x^2y - \sqrt{3xy^2(4 - x^3)}}{6}$$

これより、 $4 - x^3 \geq 0$ でなければならない。 x, y は自然数なので、 $x = 1$ である。

ところで、(2) より、

$$(a + b)^3 > (a^3 + b^3)$$

$$x^6y^3 > x^3y^3$$

$$x^3 > 1$$

これは、矛盾。よって、5) は、成り立たない。

表 1: 各変数の奇数偶数値表

a	b	c	$a+b$	a^2	$-ab$	$+b^2$	$=$	$(a+b)(a^2-ab+b^2)$	x	y	x^3	y^3	結果	備考
奇	奇	偶	偶	奇	奇	奇	奇	偶	奇	偶	奇	偶	矛盾	$a+b=x^3$
奇	偶	奇	奇	奇	偶	偶	奇	奇	-	-	-	-	正常	
偶	奇	奇	奇	偶	偶	奇	奇	奇	-	-	-	-	正常	
偶	偶	偶	偶	偶	偶	偶	偶	偶	奇	偶	奇	偶	矛盾	$a+b=x^3$

2.6 6) $f(a,b) = x^3, g(a,b) = y^3$

表 1 において、 a, b, c, x, y の奇数偶数で、 $a+b$ (偶数) $= x^3$ (奇数) という矛盾が生ずることがあるので、6) は成り立たない。