

フェルマーの最終定理の証明

愛犬ベルのために

最新 2021 年 3 月 17 日

はじめに

これは、BBS「数の不思議世界」で、中年 A 様と議論しながら、完成したものです。オイラーとは違った手法で、構成されています。なお、連立方程式の解法に数式処理ソフト maxima を使いました。

更新履歴

2021.3.12 新規作成

2021.3.13 修正

2021.3.15 修正

2021.3.16 修正

2021.3.17 修正

1 フェルマーの最終定理 $n=3$ の場合

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = c^3$ ただし a, b, c は自然数で互いに素であるとする。(1)

この (1) において、 $c = xy$ (ただし x, y は自然数) とし、

- $a + b = 1 \quad a^2 - ab + b^2 = x^3 y^3$
- $a + b = x^3 y^3 \quad a^2 - ab + b^2 = 1$
- $a + b = xy \quad a^2 - ab + b^2 = x^2 y^2$
- $a + b = x^2 y \quad a^2 - ab + b^2 = xy^2$
- $a + b = x^2 y^2 \quad a^2 - ab + b^2 = xy$
- $a + b = x^2 y^3 \quad a^2 - ab + b^2 = x$
- $a + b = xy^3 \quad a^2 - ab + b^2 = x^2$
- $a + b = x \quad a^2 - ab + b^2 = x^2 y^3$

- $a + b = x^2 \quad a^2 - ab + b^2 = xy^3$
- $a + b = x^3 \quad a^2 - ab + b^2 = y^3$

について、検討するものである。 x, y の入れ替えても内容的に同じものは除いてある。背理法をもちいる。(1) が成り立つものとする。

1.1 $a + b = 1 \quad a^2 - ab + b^2 = x^3y^3$ の場合

$a + b = 1$ は、 a, b は自然数より、ありえない。よって、(1) は、成り立たない。

1.2 $a + b = x^3y^3 \quad a^2 - ab + b^2 = 1$ の場合

$$a^2 - ab + b^2 = (a - b)^2 + ab$$

ここで、 a, b は自然数より、

$$a^2 - ab + b^2 = (a - b)^2 + ab \geq 1$$

よって、 $a^2 - ab + b^2 = 1$ は、等号が成り立つときであり、 $a = b = 1$ のとき、(1) は、成り立たない。

1.3 $a + b = xy \quad a^2 - ab + b^2 = x^2y^2$ の場合

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = x^2y^2$$

また、

$$a^2 - ab + b^2 = x^2y^2$$

より、これら 2 つの式を引いて、

$$3ab = 0$$

よって、 a, b のいずれかが 0 であるが、 a, b は自然数により、矛盾。故に、(1) は、成り立たない。

1.4 $a + b = x^2y \quad a^2 - ab + b^2 = xy^2$ の場合

連立方程式

$$\begin{cases} a + b = x^2y \\ a^2 - ab + b^2 = xy^2 \end{cases} \quad (2)$$

を解くと、

$$a = \frac{3x^2y - \sqrt{3xy^2(4 - x^3)}}{6}, b = \frac{3x^2y + \sqrt{3xy^2(4 - x^3)}}{6}$$

$$a = \frac{3x^2y + \sqrt{3xy^2(4-x^3)}}{6}, b = \frac{3x^2y - \sqrt{3xy^2(4-x^3)}}{6}$$

これより、 $4-x^3 \geq 0$ でなければならない。 x, y は自然数なので、 $x = 1$ である。

$$\begin{cases} a + b = y \\ a^2 - ab + b^2 = y^2 \end{cases} \quad (3)$$

これより、

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = y^2$$

また、

$$a^2 - ab + b^2 = y^2$$

これら2つの式を引いて、

$$3ab = 0$$

したがって、 a, b のいずれかは、 0 である。しかしながら、 a, b は自然数。矛盾。よって、(1) は、成り立たない。

1.5 $a + b = x^2y^2$ $a^2 - ab + b^2 = xy$ の場合

連立方程式

$$\begin{cases} a + b = x^2y^2 \\ a^2 - ab + b^2 = xy \end{cases} \quad (4)$$

を解くと、

$$a = \frac{3x^2y^2 - \sqrt{3xy(4-x^3y^3)}}{6}, b = \frac{3x^2y^2 + \sqrt{3xy(4-x^3y^3)}}{6}$$

$$a = \frac{3x^2y^2 + \sqrt{3xy(4-x^3y^3)}}{6}, b = \frac{3x^2y^2 - \sqrt{3xy(4-x^3y^3)}}{6}$$

これより、 $4-x^3y^3 \geq 0$ でなければならない。 x, y は自然数なので、 $x = y = 1$ である。ゆえに、

$$a^3 + b^3 = x^3y^3 = 1$$

ここで、 a, b, x, y は自然数。矛盾。よって、(1) は、成り立たない。

1.6 $a + b = x^2y^3$ $a^2 - ab + b^2 = x$ の場合

連立方程式

$$\begin{cases} a + b = x^2y^3 \\ a^2 - ab + b^2 = x \end{cases} \quad (5)$$

を解くと、

$$a = \frac{3x^2y^3 - \sqrt{3x(4-x^3y^6)}}{6}, b = \frac{3x^2y^3 + \sqrt{3x(4-x^3y^6)}}{6}$$

$$a = \frac{3x^2y^3 + \sqrt{3x(4 - x^3y^6)}}{6}, b = \frac{3x^2y^3 - \sqrt{3x(4 - x^3y^6)}}{6}$$

これより、 $4 - x^3y^6 \geq 0$ でなければならない。 x, y は自然数なので、 $x = y = 1$ である。
ゆえに、

$$a^3 + b^3 = x^3y^3 = 1$$

ここで、 a, b, x, y は自然数。矛盾。よって、(1) は、成り立たない。

1.7 $a + b = xy^3 \quad a^2 - ab + b^2 = x^2$ の場合

連立方程式

$$\begin{cases} a + b = xy^3 \\ a^2 - ab + b^2 = x^2 \end{cases} \quad (6)$$

を解くと、

$$a = \frac{3xy^3 - \sqrt{3x^2(4 - y^6)}}{6}, b = \frac{3xy^3 + \sqrt{3x^2(4 - y^6)}}{6}$$

$$a = \frac{3xy^3 + \sqrt{3x^2(4 - y^6)}}{6}, b = \frac{3xy^3 - \sqrt{3x^2(4 - y^6)}}{6}$$

これより、 $4 - y^6 \geq 0$ でなければならない。 x, y は自然数なので、 $y = 1$ である。

$$\begin{cases} a + b = x \\ a^2 - ab + b^2 = x^2 \end{cases} \quad (7)$$

これより、

$$(a + b)^2 = a^2 + ab + b^2 = x^2$$

また、

$$a^2 - ab + b^2 = x^2$$

これら 2 つの式の引いて

$$3ab = 0$$

したがって、 a, b のいずれかは、0 である。しかしながら、 a, b は自然数。矛盾。よって、
(1) は、成り立たない。

1.8 $a + b = x \quad a^2 - ab + b^2 = x^2y^3$ の場合

連立方程式

$$\begin{cases} a + b = x \\ a^2 - ab + b^2 = x^2y^3 \end{cases} \quad (8)$$

より、

$$a^2 - ab + b^2 = (a + b)^2 - 3ab$$

$$x^2y^3 = x^2 - 3ab$$

$$x^2(1 - y^3) = 3ab$$

ここで、 a, b, x, y は自然数。ゆえに、

$$1 - y^3 > 0$$

矛盾。よって、(1) は、成り立たない。

1.9 $a + b = x^2 \quad a^2 - ab + b^2 = xy^3$ の場合

連立方程式

$$\begin{cases} a + b = x^2 \\ a^2 - ab + b^2 = xy^3 \end{cases} \quad (9)$$

さて、

$$a + b = x^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = x^4$$

また、

$$a^2 - ab + b^2 = xy^3$$

この2つを引いて、

$$3ab = x^4 - xy^3$$

$$3ab = x(x^3 - y^3)$$

$$3ab = x(x - y)\{x^2 + xy + y^2\}$$

$$3ab = x(x - y)\{(x - y)^2 + 3xy\}$$

1.9.1 $x - y = 3m$ (m は整数) の場合

$$3ab = x \cdot 3m\{(3m)^2 + 3xy\}$$

$$3ab = x \cdot 3m\{(3m)^2 + 3xy\} = x \cdot 3m(9m^2 + 3xy) = x \cdot 9m(3m^2 + xy)$$

$$3ab = 9xm(3m^2 + xy)$$

$$ab = 3xm(3m^2 + xy)$$

よって、 a, b のうち少なくとも1つは3の倍数である。

また、 $a = 3p + 1, b = 3q + 2$ (p, q は整数) として、 $a^3 + b^3 = c^3$ に代入すると、

$$(3p + 1)^3 + (3q + 2)^3 = 27p^3 + 27p^2 + 9p + 1 + 27q^3 + 54q^2 + 36q + 8$$

$$= 27p^3 + 27q^3 + 27p^2 + 54q^2 + 9p + 36q + 9$$

よって、 c を3の倍数にすれば成り立つ場合がある。よって、 a, b のうち少なくとも1つが3の倍数とは限らない。

, より矛盾。よって、(1) は、成り立たない。

1.9.2 $x - y = 3m + 1$ (m は整数) の場合

$$3ab = x(3m + 1)\{(3m + 1)^2 + 3xy\}$$

$$3ab = x(3m + 1)\{(3m + 1)^2 + 3xy\} = x(3m + 1)(9m^2 + 6m + 3xy + 1)$$

右辺は、 $3m + 1$ は 3 で割ると 1 余る数と、 $(3m + 1)^2 + 3xy$ は 3 で割ると 1 余る数との積で、左辺は 3 の倍数より、 x が 3 の倍数である。

x が 3 の倍数なので、 $c = xy$ より、 c も 3 の倍数。すると、 a, b は、3 で割ると 1 余る数と、3 で割ると 2 余る数である。

よって、左辺の a と b に 3 の因子がないので、右辺の 3 の倍数の x は、 $x = 3$ である。また、左辺が互いに素な 3 つの数の積より、右辺も 3 つの互いの素な数の積である。

つまり、 $3m + 1$ と $(3m + 1)^2 + 3xy$ は左辺の a と b と同じ 3 で割ると 1 余る数と 3 で割ると 2 余る数の組み合わせである。

ところが、 $3m + 1$ は 3 で割ると 1 余る数で、 $(3m + 1)^2 + 3xy$ も 3 で割ると 1 余る数より矛盾。よって、(1) は、成り立たない。

1.9.3 $x - y = 3m + 2$ (m は整数) の場合

$$3ab = x(3m + 2)\{(3m + 2)^2 + 3xy\}$$

$$3ab = x(3m + 2)\{(3m + 2)^2 + 3xy\} = x(3m + 2)(9m^2 + 12m + 3 + 3xy + 1)$$

左辺が 3 の倍数より右辺も 3 の倍数で、 $3m + 2$ は 3 で割ると 2 余る数と、 $(3m + 2)^2 + 3xy$ は 3 で割ると 1 余る数なので、両方とも、3 の倍数ではないので、 x が 3 の倍数。また、 a と b は互いに素。

x が 3 の倍数なので、 $c = xy$ より、より c も 3 の倍数なので、 a と b は 3 で割ると 1 余る数と 3 で割ると 2 余る数の組み合わせとなる。

よって、3 と a と b は互いに素である。左辺が互いに素な 3 数の積より、右辺も互いに素な 3 数の積である。

$$\text{したがって、} x = 3, ab = x(3m + 2)\{(3m + 2)^2 + 3xy\}$$

$x = 3$ から、 $a + b = x^2$ に代入すると、 $a + b = 9$ より、 $(a, b) = (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5)$ である。

$a^3 + b^3 = c^3$ に代入して、 $1^3 + 8^3 = 513 = 3^3 \times 19$ よって、成り立たない。

$2^3 + 7^3 = 351 = 3^3 \times 13$ よって、成り立たない。

$3^3 + 6^3 = 243 = 3^5$ よって、成り立たない。

$4^3 + 5^3 = 189 = 3^3 \times 7$ よって、成り立たない。

よって、(1) は、成り立たない。

1.10 $a + b = x^3$ $a^2 - ab + b^2 = y^3$ の場合

連立方程式

$$\begin{cases} a + b = x^3 \\ a^2 - ab + b^2 = y^3 \end{cases} \quad (10)$$

さて、

$$\begin{aligned} a + b &= x^3 \\ (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 = x^6 \end{aligned}$$

また、

$$a^2 - ab + b^2 = y^3$$

この2つを引いて、

$$\begin{aligned} 3ab &= x^6 - y^3 \\ 3ab &= (x^2)^3 - y^3 \\ 3ab &= (x^2 - y)\{(x^2)^2 + x^2y + y^2\} \\ 3ab &= (x^2 - y)\{(x^2 - y)^2 + 3x^2y\} \end{aligned}$$

1.10.1 $x^2 - y = 3m$ (m は整数) の場合

$$\begin{aligned} 3ab &= 3m\{(3m)^2 + 3x^2y\} \\ 3ab &= 3m\{(3m)^2 + 3x^2y\} = 3m(9m^2 + 3x^2y) = 9m(3m^2 + x^2y) \\ 3ab &= 9m(3m^2 + x^2y) \\ ab &= 3m(3m^2 + x^2y) \end{aligned}$$

よって、 a, b のうち少なくとも1つは3の倍数である。

また、 $a = 3p + 1, b = 3q + 2$ (p, q は整数) として、 $a^3 + b^3 = c^3$ に代入すると、

$$\begin{aligned} (3p + 1)^3 + (3q + 2)^3 &= 27p^3 + 27p^2 + 9p + 1 + 27q^3 + 54q^2 + 36q + 8 \\ &= 27p^3 + 27q^3 + 27p^2 + 54q^2 + 9p + 36q + 9 \end{aligned}$$

よって、 c を3の倍数にすれば成り立つ場合がある。よって、 a, b のうち少なくとも1つが3の倍数とは限らない。

, より矛盾。よって、(1) は、成り立たない。

1.10.2 $x^2 - y = 3m + 1$ (m は整数) の場合

$$3ab = (3m + 1)\{(3m + 1)^2 + 3x^2y\}$$

$$3ab = (3m + 1)\{(3m + 1)^2 + 3x^2y\} = (3m + 1)(9m^2 + 6m + 3x^2y + 1)$$

よって、右辺は3で割ると1余る数と3で割ると1余る数の積より、3で割ると1余る。ところが、左辺は3の倍数より矛盾。よって、(1) は、成り立たない。

1.10.3 $x^2 - y = 3m + 2$ (m は整数) の場合

$$3ab = (3m + 2)\{(3m + 2)^2 + 3x^2y\}$$

$$3ab = (3m + 2)\{(3m + 2)^2 + 3x^2y\} = (3m + 2)(9m^2 + 12m + 3 + 3x^2y + 1)$$

よって、右辺は3で割ると2余る数と3で割ると1余る数の積より、3で割ると2余る。ところが、左辺は3の倍数より矛盾。よって、(1) は、成り立たない。

よって、 $n = 3$ のときのフェルマーの最終定理が証明された。