

フェルマーの最終定理の証明 ($n = 5$ c は素数) 改訂版

愛犬ベルのために

最新 2021 年 8 月 30 日

はじめに

これは、BBS「数の不思議世界」で、中年 A 様と議論しながら、完成したものです。ここまでにとどり着くには、中年 A 様のご尽力があったからこそで、改めてお礼を申し上げます。

更新履歴

2021.8.30 新規作成

1 フェルマーの最終定理 $n=5$ の場合 (ただし、 c は素数とする)

$a^5 + b^5 = c^5$ となる自然数 a, b, c が存在すると仮定して、 $a = 1, b = 1$ を代入すると、 $c^5 = 2$ より、自然数 c は存在しない。

よって、以後、 $a \geq 1, b \geq 2$ または $a \geq 2, b \geq 1$ の場合について考察する。

$$(a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) = c^5$$

ここで、 c は素数より、

1. $a + b = c, a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 = c^4$ の場合
2. $a + b = c^2, a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 = c^3$ の場合
3. $a + b = c^3, a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 = c^2$ の場合
4. $a + b = c^4, a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 = c^1$ の場合
5. $a + b = c^5, a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 = 1$ の場合

この 5 通りを考えれば良い。

1.1 $a + b = c, a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 = c^4$ の場合

$$\begin{cases} a + b = c & \alpha \\ a^5 + b^5 = c^5 & \beta \end{cases} \quad (1)$$

式 α^5 、 β より、

$$(a + b)^5 = a^5 + b^5 = c^5$$

a, b は自然数より、

$$(a + b)^5 > (a^5 + b^5)$$

よって、矛盾。

1.2 $a + b = c^2, a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 = c^3$ の場合

$$\begin{cases} a + b = c^2 & \alpha \\ a^5 + b^5 = c^5 & \beta \end{cases} \quad (2)$$

式 α^5 、 β^2 より、

$$(a + b)^5 = (a^5 + b^5)^2 = c^{10}$$

ところで、補題より、

$$(a^5 + b^5)^2 > (a + b)^5$$

よって、矛盾。

1.3 $a + b = c^3, a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 = c^2$ の場合

$$\begin{cases} a + b = c^3 & \alpha \\ a^5 + b^5 = c^5 & \beta \end{cases} \quad (3)$$

式 α^5 、 β^3 より、

$$(a + b)^5 = (a^5 + b^5)^3 = c^{15}$$

ところで、補題より、

$$(a^5 + b^5)^2 > (a + b)^5$$

また、 a, b は自然数より、

$$(a^5 + b^5)^3 > (a^5 + b^5)^2$$

ゆえに、

$$(a^5 + b^5)^3 > (a + b)^5$$

よって、矛盾。

1.4 $a + b = c^4, a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 = c^1$ の場合

$$\begin{cases} a + b = c^4 & \alpha \\ a^5 + b^5 = c^5 & \beta \end{cases} \quad (4)$$

式 α, β より、

$$(a + b)^5 = (a^5 + b^5)^4 = c^{20}$$

ところで、補題より、

$$(a^5 + b^5)^2 > (a + b)^5$$

また、 a, b は自然数より、

$$(a^5 + b^5)^4 > (a^5 + b^5)^2$$

ゆえに、

$$(a^5 + b^5)^4 > (a + b)^5$$

よって、矛盾。

1.5 $a + b = c^5, a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 = 1$ の場合

$$\begin{cases} a + b = c^5 & \alpha \\ a^5 + b^5 = c^5 & \beta \end{cases} \quad (5)$$

式 α, β より、

$$a + b = a^5 + b^5 = c^5$$

$a \geq 2$ または $b \geq 2$ でともに自然数より、

$$(a + b) < (a^5 + b^5)$$

よって、矛盾。

以上から、背理法により、 $a^5 + b^5 = c^5$ となる自然数 a, b, c は存在しない。
ただし、 c は素数。

2 補題

$(a^5 + b^5)^2 > (a + b)^5$ となる事を証明せよ。ただし、 $a \geq 1, b \geq 2$ または $a \geq 2, b \geq 1$ (自然数) とする。

2.1 解答

$$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) \quad (6)$$

より、

$$\begin{aligned} (a^5 + b^5)^2 - (a + b)^5 &= (a + b)^2(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)^2 - (a + b)^5 \\ &= (a + b)^2\{(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)^2 - (a + b)^3\} \end{aligned}$$

ここで、

$$(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)^2 = a^8 - 2a^7b + 3a^6b^2 - 4a^5b^3 + 5a^4b^4 - 4a^3b^5 + 3a^2b^6 - 2ab^7 + b^8$$

そこで、 $a = x, b = x + j$ ただし、 $x \geq 1, j \geq 1$ とおくと、

$$\begin{aligned} &a^8 - 2a^7b + 3a^6b^2 - 4a^5b^3 + 5a^4b^4 - 4a^3b^5 + 3a^2b^6 - 2ab^7 + b^8 \\ &= x^8 + 4jx^7 + 12j^2x^6 + 22j^3x^5 + 30j^4x^4 + 28j^5x^3 + 17j^6x^2 + 6j^7x + j^8 \quad (\mathcal{A}) \end{aligned}$$

また、

$$(a + b)^3 = 8x^3 + 12jx^2 + 6j^2x + j^3 \quad (\mathcal{I})$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} (a^5 + b^5)^2 - (a + b)^5 &= (a + b)^2\{(\mathcal{A}) - (\mathcal{I})\} \\ &= x^8 + 4jx^7 + 12j^2x^6 + 22j^3x^5 + 30j^4x^4 + (28j^5 - 8)x^3 + (17j^6 - 12j)x^2 + (6j^7 - 6j^2)x + j^8 - j^3 \\ &= x^8 + 4jx^7 + 12j^2x^6 + 22j^3x^5 + 30j^4x^4 + 4(7j^5 - 2)x^3 + j(17j^5 - 12)x^2 + 6j^2(j^5 - 1)x + j^3(j^5 - 1) \end{aligned}$$

また、 $x \geq 1, j \geq 1$ であるから、

$$= x^8 + 4jx^7 + 12j^2x^6 + 22j^3x^5 + 30j^4x^4 + 4(7j^5 - 2)x^3 + j(17j^5 - 12)x^2 + 6j^2(j^5 - 1)x + j^3(j^5 - 1) > 0$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} (a^5 + b^5)^2 - (a + b)^5 &> 0 \\ (a^5 + b^5)^2 &> (a + b)^5 \end{aligned}$$

よって、示された。