

フェルマーの最終定理の証明 ($n = 7$ c は素数)

愛犬ベルのために

最新 2021 年 9 月 1 日

はじめに

これは、BBS「数の不思議世界」で、中年 A 様と議論しながら、完成したものです。ここまでにとどり着くには、中年 A 様のご尽力があったからこそで、改めてお礼を申し上げます。

更新履歴

2021.9.1 新規作成

1 フェルマーの最終定理 $n=7$ の場合 (ただし、 c は素数とする)

$a^7 + b^7 = c^7$ となる自然数 a, b, c が存在すると仮定して、 $a = 1, b = 1$ を代入すると、 $c^7 = 2$ より、自然数 c は存在しない。

よって、以後、 $a \geq 1, b \geq 2$ または $a \geq 2, b \geq 1$ の場合について考察する。

$$a^7 + b^7 = (a + b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6) = c^7$$

ここで、 c は素数より、

1. $a + b = c, a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6 = c^6$ の場合
2. $a + b = c^2, a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6 = c^5$ の場合
3. $a + b = c^3, a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6 = c^4$ の場合
4. $a + b = c^4, a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6 = c^3$ の場合
5. $a + b = c^5, a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6 = c^2$ の場合
6. $a + b = c^6, a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6 = c$ の場合
7. $a + b = c^7, a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6 = 1$ の場合

この 7 通りを考えれば良い。

1.1 $a + b = c, a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6 = c^6$ の場合

$$\begin{cases} a + b = c & \alpha \\ a^7 + b^7 = c^7 & \beta \end{cases} \quad (1)$$

式 α^7, β より、

$$(a + b)^7 = a^7 + b^7 = c^7$$

a, b は自然数より、

$$(a + b)^7 > (a^7 + b^7)$$

よって、矛盾。

1.2 $a + b = c^2, a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6 = c^5$ の場合

$$\begin{cases} a + b = c^2 & \alpha \\ a^7 + b^7 = c^7 & \beta \end{cases} \quad (2)$$

式 α^7, β^2 より、

$$(a + b)^7 = (a^7 + b^7)^2 = c^{14}$$

ところで、補題より、

$$(a^7 + b^7)^2 > (a + b)^7$$

よって、矛盾。

1.3 $a + b = c^3, a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6 = c^4$ の場合

$$\begin{cases} a + b = c^3 & \alpha \\ a^7 + b^7 = c^7 & \beta \end{cases} \quad (3)$$

式 α^7, β^3 より、

$$(a + b)^7 = (a^7 + b^7)^3 = c^{21}$$

ところで、補題より、

$$(a^7 + b^7)^2 > (a + b)^7$$

また、 a, b は自然数より、

$$(a^7 + b^7)^3 > (a^7 + b^7)^2$$

ゆえに、

$$(a^7 + b^7)^3 > (a + b)^7$$

よって、矛盾。

1.4 $a + b = c^4, a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6 = c^3$ の場合

$$\begin{cases} a + b = c^4 & \alpha \\ a^7 + b^7 = c^7 & \beta \end{cases} \quad (4)$$

式 α^7, β^4 より、

$$(a + b)^7 = (a^7 + b^7)^4 = c^{28}$$

ところで、補題より、

$$(a^7 + b^7)^2 > (a + b)^7$$

また、 a, b は自然数より、

$$(a^7 + b^7)^4 > (a^7 + b^7)^2$$

ゆえに、

$$(a^7 + b^7)^4 > (a + b)^7$$

よって、矛盾。

1.5 $a + b = c^5, a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6 = c^2$ の場合

$$\begin{cases} a + b = c^5 & \alpha \\ a^7 + b^7 = c^7 & \beta \end{cases} \quad (5)$$

式 α^7, β^5 より、

$$(a + b)^7 = (a^7 + b^7)^5 = c^{35}$$

ところで、補題より、

$$(a^7 + b^7)^2 > (a + b)^7$$

また、 a, b は自然数より、

$$(a^7 + b^7)^5 > (a^7 + b^7)^2$$

ゆえに、

$$(a^7 + b^7)^5 > (a + b)^7$$

よって、矛盾。

1.6 $a + b = c^6, a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6 = c$ の場合

$$\begin{cases} a + b = c^6 & \alpha \\ a^7 + b^7 = c^7 & \beta \end{cases} \quad (6)$$

式 α^7, β^6 より、

$$(a + b)^7 = (a^7 + b^7)^6 = c^{42}$$

ところで、補題より、

$$(a^7 + b^7)^2 > (a + b)^7$$

また、 a, b は自然数より、

$$(a^7 + b^7)^6 > (a^7 + b^7)^2$$

ゆえに、

$$(a^7 + b^7)^6 > (a + b)^7$$

よって、矛盾。

1.7 $a + b = c^7, a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6 = 1$ の場合

$$\begin{cases} a + b = c^7 & \alpha \\ a^7 + b^7 = c^7 & \beta \end{cases} \quad (7)$$

式 α, β より、

$$a + b = a^7 + b^7 = c^7$$

$a \geq 2$ または $b \geq 2$ でともに自然数より、

$$(a + b) < (a^7 + b^7)$$

よって、矛盾。

以上から、背理法により、 $a^7 + b^7 = c^7$ となる自然数 a, b, c は存在しない。
ただし、 c は素数。

2 補題

$(a^7 + b^7)^2 > (a + b)^7$ となる事を証明せよ。ただし、 $a \geq 1, b \geq 2$ または $a \geq 2, b \geq 1$ (自然数) とする。

2.1 解答

$$a^7 + b^7 = (a + b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6) = c^7 \quad (8)$$

より、

$$\begin{aligned} (a^7 + b^7)^2 - (a + b)^7 &= (a + b)^2(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)^2 - (a + b)^7 \\ &= (a + b)^2\{(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)^2 - (a + b)^5\} \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} &(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)^2 \\ &= a^{12} - 2a^{11}b + 3a^{10}b^2 - 4a^9b^3 + 5a^8b^4 - 6a^7b^5 + 7a^6b^6 \\ &\quad - 6a^5b^7 + 5a^4b^8 - 4a^3b^9 + 3a^2b^{10} - 2ab^{11} + b^{12} \end{aligned}$$

そこで、 $a = x, b = x + j$ ただし、 $x \geq 1, j \geq 1$ とおくと、

$$\begin{aligned} &a^{12} - 2a^{11}b + 3a^{10}b^2 - 4a^9b^3 + 5a^8b^4 - 6a^7b^5 + 7a^6b^6 \\ &\quad - 6a^5b^7 + 5a^4b^8 - 4a^3b^9 + 3a^2b^{10} - 2ab^{11} + b^{12} \\ &= x^{12} + 6jx^{11} + 27j^2x^{10} + 80j^3x^9 + 181j^4x^8 + 310j^5x^7 \\ &\quad + 399j^6x^6 + 382j^7x^5 + 269j^8x^4 + 136j^9x^3 + 47j^{10}x^2 + 10j^{11}x + j^{12} \quad (\mathcal{A}) \end{aligned}$$

また、

$$(a + b)^5 = 32x^5 + 80jx^4 + 80j^2x^3 + 40j^3x^2 + 10j^4x + j^5 \quad (\mathcal{I})$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} &(a^7 + b^7)^2 - (a + b)^7 = (a + b)^2\{(\mathcal{A}) - (\mathcal{I})\} \\ &= x^{12} + 6jx^{11} + 27j^2x^{10} + 80j^3x^9 + 181j^4x^8 + 310j^5x^7 \\ &\quad + 399j^6x^6 + 382j^7x^5 + 269j^8x^4 + 136j^9x^3 + 47j^{10}x^2 + 10j^{11}x + j^{12} \\ &\quad - (32x^5 + 80jx^4 + 80j^2x^3 + 40j^3x^2 + 10j^4x + j^5) \\ &= x^{12} + 6jx^{11} + 27j^2x^{10} + 80j^3x^9 + 181j^4x^8 + 310j^5x^7 \\ &\quad + 399j^6x^6 + (382j^7 - 32)x^5 + (269j^8 - 80j)x^4 + (136j^9 - 80j^2)x^3 \\ &\quad + (47j^{10} - 40j^3)x^2 + (10j^{11} - 10j^4)x + (j^{12} - j^5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^{12} + 6jx^{11} + 27j^2x^{10} + 80j^3x^9 + 181j^4x^8 + 310j^5x^7 \\
&+ 399j^6x^6 + (382j^7 - 32)x^5 + j(269j^7 - 80)x^4 + j^2(136j^7 - 80)x^3 \\
&+ j^3(47j^7 - 40)x^2 + 10j^4(j^7 - 1)x + j^5(j^7 - 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^{12} + 6jx^{11} + 27j^2x^{10} + 80j^3x^9 + 181j^4x^8 + 310j^5x^7 \\
&+ 399j^6x^6 + 2(191j^7 - 16)x^5 + j(269j^7 - 80)x^4 + 8j^2(17j^7 - 10)x^3 \\
&+ j^3(47j^7 - 40)x^2 + 10j^4(j^7 - 1)x + j^5(j^7 - 1)
\end{aligned}$$

また、 $x \geq 1, j \geq 1$ であるから、

$$\begin{aligned}
&= x^{12} + 6jx^{11} + 27j^2x^{10} + 80j^3x^9 + 181j^4x^8 + 310j^5x^7 \\
&+ 399j^6x^6 + 2(191j^7 - 16)x^5 + j(269j^7 - 80)x^4 + 8j^2(17j^7 - 10)x^3 \\
&+ j^3(47j^7 - 40)x^2 + 10j^4(j^7 - 1)x + j^5(j^7 - 1) > 0
\end{aligned}$$

ゆえに、

$$\begin{aligned}
&(a^7 + b^7)^2 - (a + b)^7 > 0 \\
&(a^7 + b^7)^2 > (a + b)^7
\end{aligned}$$

よって、示された。