

フェルマーの最終定理の証明

愛犬ベルのために

最新 2021 年 6 月 13 日

はじめに

これは、BBS「数の不思議世界」で、中年 A 様と議論しながら、完成したものです。ここまでにとどり着くには、中年 A 様のご尽力があったからこそで、改めてお礼を申し上げます。

更新履歴

2021.6.11 新規作成

2021.6.13 不具合の修正

1 フェルマーの最終定理 $n=5$ の場合 (ただし、 c は素数とする)

$a^5 + b^5 = c^5$ となる自然数 a, b, c が存在すると仮定して、 $a = 1, b = 1$ を代入すると、 $c^5 = 2$ より、自然数 c は存在しない。

よって、以後、 $a \geq 1, b \geq 2$ または $a \geq 2, b \geq 1$ の場合について考察する。

$$(a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) = c^5$$

ここで、 c は素数より、

1. $a + b = c, a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 = c^4$ の場合
2. $a + b = c^2, a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 = c^3$ の場合
3. $a + b = c^3, a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 = c^2$ の場合
4. $a + b = c^4, a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 = c^1$ の場合
5. $a + b = c^5, a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 = 1$ の場合

この 5 通りを考えれば良い。

1.1 $a + b = c, a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 = c^4$ の場合

$$\begin{cases} a + b = c & \alpha \\ a^5 + b^5 = c^5 & \beta \end{cases} \quad (1)$$

式 α^5 、 β より、

$$(a + b)^5 = a^5 + b^5 = c^5$$

a, b は自然数より、

$$(a + b)^5 > (a^5 + b^5)$$

よって、矛盾。

1.2 $a + b = c^2, a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 = c^3$ の場合

$$\begin{cases} a + b = c^2 & \alpha \\ a^5 + b^5 = c^5 & \beta \end{cases} \quad (2)$$

式 α^5 、 β^2 より、

$$(a + b)^5 = (a^5 + b^5)^2 = c^{10}$$

ところで、補題より、

$$(a^5 + b^5)^2 > (a + b)^5$$

よって、矛盾。

1.3 $a + b = c^3, a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 = c^2$ の場合

$$\begin{cases} a + b = c^3 & \alpha \\ a^5 + b^5 = c^5 & \beta \end{cases} \quad (3)$$

式 α^5 、 β^3 より、

$$(a + b)^5 = (a^5 + b^5)^3 = c^{15}$$

ところで、補題より、

$$(a^5 + b^5)^2 > (a + b)^5$$

また、 a, b は自然数より、

$$(a^5 + b^5)^3 > (a^5 + b^5)^2$$

ゆえに、

$$(a^5 + b^5)^3 > (a + b)^5$$

よって、矛盾。

1.4 $a + b = c^4, a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 = c^1$ の場合

$$\begin{cases} a + b = c^4 & \alpha \\ a^5 + b^5 = c^5 & \beta \end{cases} \quad (4)$$

式 α, β より、

$$(a + b)^5 = (a^5 + b^5)^4 = c^{20}$$

ところで、補題より、

$$(a^5 + b^5)^2 > (a + b)^5$$

また、 a, b は自然数より、

$$(a^5 + b^5)^4 > (a^5 + b^5)^2$$

ゆえに、

$$(a^5 + b^5)^4 > (a + b)^5$$

よって、矛盾。

1.5 $a + b = c^5, a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 = 1$ の場合

$$\begin{cases} a + b = c^5 & \alpha \\ a^5 + b^5 = c^5 & \beta \end{cases} \quad (5)$$

式 α, β より、

$$a + b = a^5 + b^5 = c^5$$

$a \geq 2$ または $b \geq 2$ でともに自然数より、

$$(a + b) < (a^5 + b^5)$$

よって、矛盾。

以上から、背理法により、 $a^5 + b^5 = c^5$ となる自然数 a, b, c は存在しない。
ただし、 c は素数。

2 補題

$(a^5 + b^5)^2 > (a + b)^5$ となる事を証明せよ。ただし、 $a \geq 1, b \geq 2$ または $a \geq 2, b \geq 1$ (自然数) とする。

2.1 解答

数学的帰納法で示す。まず、 $b = 2$ に固定すると、

$$(a^5 + b^5)^2 = (a^5 + 32)^2 > (a + 2)^5$$

2.1.1 $a = 1$ の時

$33^2 = 1089$ また、 $3^5 = 243$ より、 $1089 > 243$ で成り立つ。

2.1.2 $a = k$ の時

$a = k$ の時成り立つと仮定すると、

$$(a^5 + b^5)^2 = (k^5 + 32)^2 > (k + 2)^5$$

故に、

$$\begin{aligned} k^{10} + 64k^5 + 1024 &> k^5 + 10k^4 + 40k^3 + 80k^2 + 80k + 32 \\ k^{10} + 63k^5 - 10k^4 - 40k^3 - 80k^2 - 80k + 992 &> 0 \quad \text{--- (ア)} \end{aligned}$$

2.1.3 $a = k + 1$ の時

$a = k + 1$ の時、

$$(a^5 + b^5)^2 = \{(k + 1)^5 + 32\}^2 > \{(k + 1) + 2\}^5$$

であるかだから、

$$\begin{aligned} &\{(k + 1)^5 + 32\}^2 - (k + 3)^5 \\ &= (k + 1)^{10} + 64(k + 1)^5 + 1024 - (k^5 + 15k^4 + 90k^3 + 270k^2 + 405k + 243) \\ &= k^{10} + 10k^9 + 45k^8 + 120k^7 + 210k^6 + 252k^5 + 210k^4 + 120k^3 + 45k^2 + 10k + 1 + 64(k^5 + 5k^4 + 10k^3 \\ &\quad + 10k^2 + 5k + 1) + 1024 - k^5 - 15k^4 - 90k^3 - 270k^2 - 405k - 243 \\ &= k^{10} + 10k^9 + 45k^8 + 120k^7 + 210k^6 + 315k^5 + 515k^4 + 670k^3 + 415k^2 - 75k + 846 \\ &= (k^{10} + 63k^5 - 10k^4 - 40k^3 - 80k^2 - 80k + 992) + 10k^9 + 45k^8 + 120k^7 + 210k^6 + 252k^5 + 525k^4 \\ &\quad + 710k^3 + 495k^2 + 5k - 146 \end{aligned}$$

ところで、(ア)と $k \geq 1$ より、この式は正である。

$10 + 45 + 120 + 210 + 252 + 525 + 710 + 495 + 5 - 146 > 0$ は自明。

故に、

$$\{(k+1)^5 + 32\}^2 - (k+3)^5 > 0$$

$$\{(k+1)^5 + 32\}^2 > \{(k+1) + 2\}^5$$

よって、 $a = k + 1$ も時も成り立つ。

2.1.4 $a = 2$ の時

また、 $a = 2$ に固定して同様の事をする、与式は対称式より成り立つ。

よって、数学的帰納法により、 $a \geq 1, b \geq 2$ または $a \geq 2, b \geq 1$ (自然数) の時、 $(a^5 + b^5)^2 > (a + b)^5$ が成り立つ。

よって、示された。