

フェルマーの最終定理の証明

中年 A

最新 2021 年 6 月 12 日

はじめに

これは、BBS「数の不思議世界」で、中年 A 様が完成したものです。

更新履歴

2021.6.12 新規作成

1 フェルマーの最終定理 $n=4$ の場合

1.1 問題

$x^n + y^n = z^n$ を満たす自然数 x, y, z は存在しない事をせよ。ただし、 n は 4 の倍数とする。

1.2 解答

$x^n + y^n = z^n$ となる自然数 x, y, z が存在すると仮定して、 $n = 4m$ (m は自然数) を代入すると、

$$x^{4m} + y^{4m} = z^{4m}$$

$$x^{4m} + y^{4m} + 2x^{2m}y^{2m} - 2x^{2m}y^{2m} = z^{4m}$$

$$(x^{2m} + y^{2m})^2 - 2x^{2m}y^{2m} = z^{4m}$$

$$(x^{2m} + y^{2m} + \sqrt{2}x^m y^m)(x^{2m} + y^{2m} - \sqrt{2}x^m y^m) = z^{4m}$$

ここで、 $z = pq$ (p, q は自然数) と置くと、

$$(x^{2m} + y^{2m} + \sqrt{2}x^m y^m)(x^{2m} + y^{2m} - \sqrt{2}x^m y^m) = p^{4m} q^{4m}$$

よって、

$$x^{2m} + y^{2m} + \sqrt{2}x^m y^m = p^s q^t \quad (1)$$

$$x^{2m} + y^{2m} - \sqrt{2}x^m y^m = p^u q^v \quad (2)$$

と置ける。 (s, t, u, v は非負整数で $s + u = 4m, t + v = 4m$)

上二式を引いて、

$$2\sqrt{2}x^m y^m = p^s q^t - p^u q^v$$

x, y, p, q, m は自然数で s, t, u, v は非負整数より、左辺は無理数で右辺は有理数（特に整数）より矛盾。

よって、背理法により、 $x^n + y^n = z^n$ となる自然数 x, y, z 存在しない。

ただし、 n は 4 の倍数。