

# フェルマーの最終定理の証明（制限付きの一般の $n$ の場合）改訂版

壊れた扉さん、愛犬ベルのために

最新 2021 年 8 月 7 日

## はじめに

これは、BBS「数の不思議世界」で、壊れた扉さんとの共同作業によってできた共同作品です。なお、これは、壊れた扉さんの 2021-8-6 の夜の投稿を清書したものです。

### 更新履歴

2021.8.7 新規作成

## 1 証明

フェルマーの最終定理は  $n = 3, 4$  の場合などが初等的に証明されていて、例えば、 $n = 15$  の場合などは、

$$(a^5)^3 + (b^5)^3 = (c^5)^3$$

などとすれば成り立たない事は自明なので、あとは  $n$  が奇素数の場合のみ考えれば良い。

### 1.1 $a^n = (a + j)^n - (a + k)^n$

そこで、 $a^n + b^n = c^n$  ( $n$  は奇素数) となる自然数  $a, b, c$  が存在すると仮定すると、自然数  $j, k$  を使って、

$$a^n + (a + k)^n = (a + j)^n \quad (\text{ただし、} b = a + k, c = a + j)$$

と置ける。ゆえに、

$$a^n = (a + j)^n - (a + k)^n$$

## 1.2 二項定理で展開

これを二項定理で展開すると、

$$\begin{aligned} a^n &= a^n + {}_n C_1 a^{n-1} j + {}_n C_2 a^{n-2} j^2 + {}_n C_3 a^{n-3} j^3 + \cdots + {}_n C_{n-1} a j^{n-1} + j^n \\ &\quad - (a^n + {}_n C_1 a^{n-1} k + {}_n C_2 a^{n-2} k^2 + {}_n C_3 a^{n-3} k^3 + \cdots + {}_n C_{n-1} a k^{n-1} + k^n) \\ &= {}_n C_1 a^{n-1} (j-k) + {}_n C_2 a^{n-2} (j^2 - k^2) + {}_n C_3 a^{n-3} (j^3 - k^3) + \cdots + {}_n C_{n-1} a (j^{n-1} - k^{n-1}) + j^n - k^n \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} a^n &= (j-k) \{ {}_n C_1 a^{n-1} + {}_n C_2 a^{n-2} (j+k) + {}_n C_3 a^{n-3} (j^2 + jk + k^2) + \cdots \\ &\quad + {}_n C_{n-1} a (j^{n-2} + j^{n-3} k + j^{n-4} k^2 + \cdots + k^{n-2}) + (j^{n-1} + j^{n-2} k + j^{n-3} k^2 + \cdots + k^{n-1}) \} \end{aligned}$$

## 1.3 $j - k = m$ とすると

ここで、 $j - k = m$  とすると、 $j = k + m$

$$\begin{aligned} a^n &= m \{ {}_n C_1 a^{n-1} + {}_n C_2 a^{n-2} (j+k) + {}_n C_3 a^{n-3} (j^2 + jk + k^2) + \cdots \\ &\quad + {}_n C_{n-1} a (j^{n-2} + j^{n-3} k + j^{n-4} k^2 + \cdots + k^{n-2}) \\ &\quad + (j^{n-1} + j^{n-2} k + j^{n-3} k^2 + \cdots + k^{n-1}) \} \end{aligned}$$

## 1.4 $(a - m)^n$

ここで、 $(a - m)^n$  を展開して、

$$\begin{aligned} (a-m)^n &= a^n + {}_n C_1 a^{n-1} (-m) + {}_n C_2 a^{n-2} (-m)^2 + {}_n C_3 a^{n-3} (-m)^3 + \cdots + {}_n C_{n-1} a (-m)^{n-1} + (-m)^n \\ &= a^n - {}_n C_1 m a^{n-1} + {}_n C_2 m^2 a^{n-2} - {}_n C_3 m^3 a^{n-3} + \cdots + {}_n C_{n-1} m^{n-1} a - m^n \end{aligned}$$

の両辺に、

$$- {}_n C_1 m a^{n-1} + {}_n C_2 m^2 a^{n-2} - {}_n C_3 m^3 a^{n-3} + \cdots + {}_n C_{n-1} m^{n-1} a - m^n$$

を加えると、

$$\begin{aligned} (a-m)^n &= m \{ {}_n C_2 a^{n-2} (j+k+m) + {}_n C_3 a^{n-3} (j^2 + jk + k^2 - m^2) + \cdots \\ &\quad + {}_n C_{n-1} a (j^{n-2} + j^{n-3} k + j^{n-4} k^2 + \cdots + k^{n-2} + m^{n-2}) \\ &\quad + (j^{n-1} + j^{n-2} k + j^{n-3} k^2 + \cdots + k^{n-1} - m^{n-1}) \} \end{aligned}$$

## 1.5 ${}_n C_r$ は $n$ の倍数

ところで、 $n$  は奇素数より、 ${}_n C_r$  は  $n$  でくくれる。よって、右辺が  $n$  でくくれるには、

$$j^{n-1} + j^{n-2}k + j^{n-3}k^2 + \cdots + k^{n-1} - m^{n-1}$$

が  $n$  でくくれれば良い。

### 1.5.1 この式の元を考える

ところで、この式の元を考えると、

$$\begin{aligned} &= \frac{j^n - k^n}{j - k} - m^{n-1} = \frac{j^n - k^n}{m} - m^{n-1} = \frac{(k+m)^n - k^n}{m} - m^{n-1} \\ &= \frac{k^n + {}_n C_1 k^{n-1} m + {}_n C_2 k^{n-2} m^2 + {}_n C_3 k^{n-3} m^3 + \cdots + {}_n C_{n-1} k m^{n-1} + m^n - k^n}{m} - m^{n-1} \\ &= \frac{{}_n C_1 k^{n-1} m + {}_n C_2 k^{n-2} m^2 + {}_n C_3 k^{n-3} m^3 + \cdots + {}_n C_{n-1} k m^{n-1} + m^n}{m} - m^{n-1} \\ &= {}_n C_1 k^{n-1} + {}_n C_2 k^{n-2} m + {}_n C_3 k^{n-3} m^2 + \cdots + {}_n C_{n-1} k m^{n-2} \end{aligned}$$

よって、全ての項に  ${}_n C_r$  がかかっているの、 $n$ (素数) でくくれる。

したがって、 $(a-m)^n = nm P(a, k, m)$  と置ける。ここで、 $a-m$  を素数とすると、 $n$  は奇素数より  $a-m = n$  である。

## 1.6 $a+b-c$ が素数である場合

また、 $m = j - k = (a+j) - (a+k) = c - b$  よって、 $a - m = a - (c - b) = a + b - c$  つまり、 $a + b - c$  が素数である場合を考える。

ところで、 $a^n + b^n = b^n$  ( $n$  は奇素数) の偶奇性を考えると、

- i.  $a$  : 偶数,  $b$  : 偶数,  $c$  : 偶数の場合
- ii.  $a$  : 偶数,  $b$  : 奇数,  $c$  : 奇数 ( $a$  : 奇数,  $b$  : 偶数,  $c$  : 奇数) の場合
- iii.  $b$  : 奇数,  $b$  : 奇数,  $c$  : 偶数の場合

の場合しかない。今、 $a - m = n$  より、 $a - m = a - (c - b) = a + b - c = n$  よって、 $a + b = c + n$  ( $n$  は奇数) である。

- i. の場合、偶数+偶数=偶数+奇数より、偶数=奇数 よって、矛盾。
- ii. の場合、偶数+奇数=奇数+奇数より、奇数=偶数 よって、矛盾。
- iii. の場合、奇数+奇数=偶数+奇数より、偶数=奇数 よって、矛盾。

よって、全ての場合で矛盾が生じるので、背理法により、 $a^n + b^n = b^n$  が成り立つ自然数  $a, b, c$  は存在しない。

よって、フェルマーの最終定理の制限付きの一般の  $n$  の場合が示された。