

フェルマーの最終定理の証明 (制限付きの一般の n の場合) 改訂版 その2

壊れた扉さん、愛犬ベルのために

最新 2021 年 8 月 8 日

はじめに

これは、BBS「数の不思議世界」で、壊れた扉さんとの共同作業によってできた共同作品です。なお、これは、壊れた扉さんの 2021-8-7 の夜の投稿を清書したものです。

更新履歴

2021.8.8 新規作成

1 証明

フェルマーの最終定理は $n = 3, 4$ の場合などが初等的に証明されていて、例えば、 $n = 15$ の場合などは、

$$(a^5)^3 + (b^5)^3 = (c^5)^3$$

などとすれば成り立たない事は自明なので、あとは n が奇素数の場合のみ考えれば良い。

1.1 $a^n = (a + j)^n - (a + k)^n$

そこで、 $a^n + b^n = c^n$ (n は奇素数) となる自然数 a, b, c が存在すると仮定すると、自然数 j, k を使って、

$$a^n + (a + k)^n = (a + j)^n \quad (\text{ただし、} b = a + k, c = a + j)$$

と置ける。ゆえに、

$$a^n = (a + j)^n - (a + k)^n$$

1.2 二項定理で展開

これを二項定理で展開すると、

$$\begin{aligned} a^n &= a^n + {}_n C_1 a^{n-1} j + {}_n C_2 a^{n-2} j^2 + {}_n C_3 a^{n-3} j^3 + \cdots + {}_n C_{n-1} a j^{n-1} + j^n \\ &\quad - (a^n + {}_n C_1 a^{n-1} k + {}_n C_2 a^{n-2} k^2 + {}_n C_3 a^{n-3} k^3 + \cdots + {}_n C_{n-1} a k^{n-1} + k^n) \\ &= {}_n C_1 a^{n-1} (j-k) + {}_n C_2 a^{n-2} (j^2 - k^2) + {}_n C_3 a^{n-3} (j^3 - k^3) + \cdots + {}_n C_{n-1} a (j^{n-1} - k^{n-1}) + j^n - k^n \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} a^n &= (j-k) \{ {}_n C_1 a^{n-1} + {}_n C_2 a^{n-2} (j+k) + {}_n C_3 a^{n-3} (j^2 + jk + k^2) + \cdots \\ &\quad + {}_n C_{n-1} a (j^{n-2} + j^{n-3} k + j^{n-4} k^2 + \cdots + k^{n-2}) + (j^{n-1} + j^{n-2} k + j^{n-3} k^2 + \cdots + k^{n-1}) \} \end{aligned}$$

1.3 $j - k = m$ とすると

ここで、 $j - k = m$ とすると、 $j = k + m$

$$\begin{aligned} a^n &= m \{ {}_n C_1 a^{n-1} + {}_n C_2 a^{n-2} (j+k) + {}_n C_3 a^{n-3} (j^2 + jk + k^2) + \cdots \\ &\quad + {}_n C_{n-1} a (j^{n-2} + j^{n-3} k + j^{n-4} k^2 + \cdots + k^{n-2}) \\ &\quad + (j^{n-1} + j^{n-2} k + j^{n-3} k^2 + \cdots + k^{n-1}) \} \end{aligned}$$

1.4 $(a - m)^n$

ここで、 $(a - m)^n$ を展開して、

$$\begin{aligned} (a-m)^n &= a^n + {}_n C_1 a^{n-1} (-m) + {}_n C_2 a^{n-2} (-m)^2 + {}_n C_3 a^{n-3} (-m)^3 + \cdots + {}_n C_{n-1} a (-m)^{n-1} + (-m)^n \\ &= a^n - {}_n C_1 m a^{n-1} + {}_n C_2 m^2 a^{n-2} - {}_n C_3 m^3 a^{n-3} + \cdots + {}_n C_{n-1} m^{n-1} a - m^n \end{aligned}$$

の両辺に、

$$- {}_n C_1 m a^{n-1} + {}_n C_2 m^2 a^{n-2} - {}_n C_3 m^3 a^{n-3} + \cdots + {}_n C_{n-1} m^{n-1} a - m^n$$

を加えると、

$$\begin{aligned} (a-m)^n &= m \{ {}_n C_2 a^{n-2} (j+k+m) + {}_n C_3 a^{n-3} (j^2 + jk + k^2 - m^2) + \cdots \\ &\quad + {}_n C_{n-1} a (j^{n-2} + j^{n-3} k + j^{n-4} k^2 + \cdots + k^{n-2} + m^{n-2}) \\ &\quad + (j^{n-1} + j^{n-2} k + j^{n-3} k^2 + \cdots + k^{n-1} - m^{n-1}) \} \end{aligned}$$

1.5 ${}_nC_r$ は n の倍数

ところで、 n は奇素数より、 ${}_nC_r$ は n でくくれる。よって、右辺が n でくくれるには、

$$j^{n-1} + j^{n-2}k + j^{n-3}k^2 + \dots + k^{n-1} - m^{n-1}$$

が n でくくれば良い。

1.5.1 この式の元を考える

ところで、この式の元を考えると、

$$\begin{aligned} &= \frac{j^n - k^n}{j - k} - m^{n-1} = \frac{j^n - k^n}{m} - m^{n-1} = \frac{(k+m)^n - k^n}{m} - m^{n-1} \\ &= \frac{k^n + {}_nC_1 k^{n-1}m + {}_nC_2 k^{n-2}m^2 + {}_nC_3 k^{n-3}m^3 + \dots + {}_nC_{n-1} km^{n-1} + m^n - k^n}{m} - m^{n-1} \\ &= \frac{{}_nC_1 k^{n-1}m + {}_nC_2 k^{n-2}m^2 + {}_nC_3 k^{n-3}m^3 + \dots + {}_nC_{n-1} km^{n-1} + m^n}{m} - m^{n-1} \\ &= {}_nC_1 k^{n-1} + {}_nC_2 k^{n-2}m + {}_nC_3 k^{n-3}m^2 + \dots + {}_nC_{n-1} km^{n-2} \end{aligned}$$

よって、全ての項に ${}_nC_r$ がかかっているため、 n (素数) でくくれる。

したがって、 $(a-m)^n = nm P(a, k, m)$ と置ける。

1.6 $a+b-c$ が n の倍数でない場合

ここで、右辺に素因数 n があるので、左辺に素因数 n がなければ矛盾が生じる。

ところで、 $m = j - k = (a + j) - (a + k) = c - b$ より、 $a - m = a - (c - b) = a + b - c$ よって、 $a + b - c$ が n の倍数でない時、矛盾が生じる。

よって、 $a + b - c$ が n の倍数でないならば、背理法により、 $a^n + b^n = c^n$ となる自然数 a, b, c は存在しない。

よって、フェルマーの最終定理の制限 ($a + b - c$ が n の倍数でない) 付きの一般の n の場合が示された。