

フェルマーの最終定理について

愛犬ベルのために

最新 2015 年 8 月 2 日

1 更新履歴

初版 2015 年 8 月 1 日更新 2015 年 8 月 2 日

2 はじめに

フェルマーの最終定理について考えてみようと思います。まあ、ボケ防止の算数ごっこですがね。

$$x^n + y^n = z^n (x, y, z \text{ は自然数 } n \text{ は } 3 \text{ 以上の自然数}) \quad (1)$$

これが、成り立たないというものです。

3 x, y, z が奇数のとき

x, y, z が奇数のとき

$$x^n + y^n = z^n (x, y, z \text{ は自然数 } n \text{ は } 3 \text{ 以上の自然数}) \quad (2)$$

左辺は奇数と奇数の和ですから、偶数です。一方、右辺は奇数です。よって、なりたちません。

4 x, y が奇数、 z が偶数のとき

$x = 2k + 1, y = 2j + 1$ とおきます。さて、 $a = 2k$ とすると

$$x^3 = (a + 1)^3$$

これは、パスカルの三角形ですから、

$$x^3 = (a + 1)^3$$

$$x^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$$

$$x^4 = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$$

$$x^5 = a^5 + 5a^4 + 10a^3 + 10a^2 + 5a + 1$$

という具合になります。 $a = 2k$ ですから、 a の項がみな偶数です。したがって、

$$x^n = 2(k \text{ の多項式}) + 1 \quad (3)$$

となります。また、

$$y^n = 2(j \text{ の多項式}) + 1 \quad (4)$$

ですから、

$$x^n + y^n = 2(k \text{ の多項式}) + 1 + 2(j \text{ の多項式}) + 1$$

$$x^n + y^n = 2\{(k \text{ の多項式}) + (j \text{ の多項式}) + 1\}$$

ここで、 k の多項式も j の多項式も n は共通ですから、同じ形です。

4.1 j, k とともに偶数または奇数の時

かりに、 $n = 3$ を例に考えてみましょう。パスカルの三角形ですからすべての n についても言えます。

$$x^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$$

$$x^3 = a(a^2 + 3a + 3) + 1$$

また

$$y^3 = b^3 + 3b^2 + 3b + 1$$

$$y^3 = b(b^2 + 3b + 3) + 1$$

であるから、

$$x^3 + y^3 = a(a^2 + 3a + 3) + 1 + b(b^2 + 3b + 3) + 1$$

$$x^3 + y^3 = a(a^2 + 3a + 3) + b(b^2 + 3b + 3) + 2$$

$$x^3 + y^3 = a(a^2 + 3a) + b(b^2 + 3b) + (3a + 3b) + 2$$

$$x^3 + y^3 = 2k(a^2 + 3a) + 2j(b^2 + 3b) + 3(2k + 2j) + 2$$

$$x^3 + y^3 = (2k)^2(2k + 3) + (2j)^2(2j + 3) + 3(2k + 2j) + 2$$

$$x^3 + y^3 = 4k^2(2k + 3) + 4j^2(2j + 3) + 6(k + j) + 2$$

$$x^3 + y^3 = 2\{2(k^2(2k + 3) + 2j^2(2j + 3) + 3(k + j) + 1)\}$$

ここで、 $2(k^2(2k + 3) + 2j^2(2j + 3))$ が偶数です。また、 $3(k + j)$ も k, j とともに、偶数でも、奇数でも偶数です。したがって、

$$x^n + y^n = 2(\text{偶数} + 1) \quad (5)$$

ところで、 z は偶数ですから、

$$z = 2^\alpha Z$$

とすることができます。ここで、 α は1以上、 Z は奇数

$$\begin{aligned}x^n + y^n &= z^n \\2(\text{偶数} + 1) &= (2^\alpha Z)^n \\2(\text{偶数} + 1) &= 2^{\alpha n} Z^n \\ \text{偶数} + 1 &= 2^{\alpha n - 1} Z^n\end{aligned}$$

左辺は奇数、右辺は偶数で成り立ちませんね。

4.2 j, k ともに偶数または奇数でない時

j, k が奇数と偶数、または、偶数と奇数のときですね。
現在検討中

5 x, y, z が皆偶数のとき

$$x^n + y^n = z^n$$

ですから、 $x = 2^\alpha X$ 、 $y = 2^\beta Y$ 、 $z = 2^\gamma Z$ とし、 X, Y, Z は皆奇数とすると、

$$\begin{aligned}x^n + y^n &= z^n \\(2^\alpha X)^n + (2^\beta Y)^n &= (2^\gamma Z)^n \\2^{\alpha n} X^n + 2^{\beta n} Y^n &= 2^{\gamma n} Z^n\end{aligned}$$

ここで、仮に、 $\alpha < \beta, \gamma$ とすると、左辺は、 $2^{\alpha n}$ でわると、

$$X^n + 2^{(\beta-\alpha)n} Y^n$$

となります。これは、奇数足す偶数ですから、右辺は奇数でなければなりません。

$$\text{奇数} + \text{偶数} = \text{奇数}$$

という事は、 $\alpha = \gamma$ でなければなりません。これが、 $\alpha < \beta, \gamma$ の時の、すべて偶数の場合の条件です。

では、 $\beta < \alpha, \gamma$ の時も、同じように、

$$\text{偶数} + \text{奇数} = \text{奇数}$$

$\beta < \alpha, \gamma$ の時の、すべて偶数の場合の条件です。

では、 $\gamma < \alpha, \beta$ の時は、

$$\text{偶数} + \text{偶数} = \text{奇数}$$

で成り立ちません。

そこで、

$$\text{奇数} + \text{偶数} = \text{奇数}$$

$$\text{偶数} + \text{奇数} = \text{奇数}$$

を考えてみましょう。

6 x, y がそれぞれ奇数と偶数または、偶数と奇数のとき

x, y がそれぞれ奇数と偶数または、偶数と奇数のとき

$$x^n + y^n = \text{奇数}$$

は、つぎのいずれかです。

$$\text{奇数} + \text{偶数} = \text{奇数}$$

$$\text{偶数} + \text{奇数} = \text{奇数}$$

となりますね。したがって、 z が偶数なら成り立ちません。

かりに、ここでは、 x が奇数、 y が偶数とします。 z はもちろん奇数です。

$$x^n + y^n = z^n$$

$$y^n = z^n - x^n$$

$$y^n = (z^n - 1) - (x^n - 1)$$

ここで、 $z^n - 1, x^n - 1$ は、偶数ですから、 $x^n = 2^\alpha X^n$ 、 $y^n = 2^\beta Y^n$ 、 $z^n = 2^\gamma Z^n$ とし、 X, Y, Z は皆奇数とすると、

$$2^{\beta n} Y^n = 2^\gamma Z^n - 2^\alpha X^n$$

6.1 $\alpha < \beta n, \gamma$ の場合

両辺を 2^α でわると、

$$2^{\beta n - \alpha} Y^n = 2^{\gamma - \alpha} Z^n - X^n$$

すると、右辺は奇数なので、これは成り立たない。

6.2 $\gamma < \beta n, \alpha$ の場合

両辺を 2^γ でわると、

$$2^{\beta n - \gamma} Y^n = Z^n - 2^{\alpha - \gamma} X^n$$

すると、右辺は奇数なので、これは成り立たない。

6.3 $\beta n < \gamma, \alpha$ の場合

両辺を $2^{\beta n}$ でわると、

$$Y^n = 2^{\gamma-\beta n} Z^n - 2^{\alpha-\beta n} X^n$$

すると、左辺は奇数なので、これは成り立たない。

以上で、 x, y がそれぞれ奇数と偶数または、偶数と奇数のときと、 x, y, z が皆偶数のときは成り立たないことになりました。