

1 進数と小数

ある数 X が、0 でない自然数 k の k 進数の数であるならば、(ただし、 A_i は、 $0 \leq A_i < k$ の自然数である。)

$$X = \sum_{i=-\infty}^{i=\infty} A_i k^i \quad (1)$$

と表される。いま、小数部分を取り出して y とすると、

$$Y = \sum_{i=-\infty}^{i=-1} A_i k^i \quad (2)$$

$$Y = \frac{A_{-1}}{k^1} + \frac{A_{-2}}{k^2} + \frac{A_{-3}}{k^3} + \frac{A_{-4}}{k^4} + \dots \quad (3)$$

ここで、

$$Y = \frac{A}{B} \quad (4)$$

とすると、通分により

$$B = \prod_{i=1}^{\infty} k^i \quad (5)$$

$$A = \prod_{i=1}^{\infty} k^i \frac{A_{-1}}{k^1} + \prod_{i=1}^{\infty} k^i \frac{A_{-2}}{k^2} + \prod_{i=1}^{\infty} k^i \frac{A_{-3}}{k^3} + \dots$$

したがって、 Y は有理数になる。

2 進数変換

9 進数の小数 Y_9 が、10 進数の小数 Y_{10} と等しい、すなわち進数変換したものとする。すると、

$$Y_9 = \sum_{i=-m}^{i=-1} A_i 9^i \quad (6)$$

であり、

$$Y_{10} = \sum_{j=-n}^{j=-1} C_j 10^j \quad (7)$$

である。

そこで、通分すると、分母は

$$B_9 = \prod_{i=1}^m 9^i \quad (8)$$

同じく

$$B_{10} = \prod_{i=1}^n 10^i \quad (9)$$

また、分子を Z_9, Z_{10} とすると、

$$Y_9 - Y_{10}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{Z_9}{B_9} - \frac{Z_{10}}{B_{10}} \\
&= \frac{Z_9 B_{10} - Z_{10} B_9}{B_9 B_{10}}
\end{aligned}$$

そこで、9 去数をとって、

$$\begin{aligned}
&f(Y_9 - Y_{10}) \\
&= f\left\{\frac{Z_9 B_{10} - Z_{10} B_9}{B_9 B_{10}}\right\} \\
&= f\left\{\frac{f(Z_9 B_{10}) - f(Z_{10} B_9)}{f(B_9 B_{10})}\right\} \\
&= f\left\{\frac{f(f(Z_9)f(B_{10})) - f(f(Z_{10})f(B_9))}{f(f(B_9)f(B_{10}))}\right\}
\end{aligned}$$

ここで、式 8、式 9 より、 $f(B_9) = f(9)$ 、 $f(B_{10}) = f(1)$ より

$$= f\left\{\frac{f(f(Z_9)) - f(9f(Z_{10}))}{f(f(9)f(1))}\right\}$$

$f(f(9f(Z_{10}))) = 9$ は 9 の倍数だから

$$\begin{aligned}
&= f\left\{\frac{f(f(Z_9)) - f(9)}{f(9)}\right\} \\
&= f\left\{\frac{f(f(Z_9) - 9)}{9}\right\}
\end{aligned}$$

さて、

$$\begin{aligned}
Z_9 &= \prod_{i=1}^m 9^i \frac{A_{-1}}{9^1} + \prod_{i=1}^m 9^i \frac{A_{-2}}{9^2} + \prod_{i=1}^m 9^i \frac{A_{-3}}{9^3} + \dots \\
Z_9 &= 9\left\{\prod_{i=2}^m 9^i \frac{A_{-1}}{9^1} + \prod_{i=2}^m 9^i \frac{A_{-2}}{9^2} + \prod_{i=2}^m 9^i \frac{A_{-3}}{9^3} + \dots\right\}
\end{aligned}$$

もちろん、 Z_9 は 1 桁以上の小数とすると $f(f(Z_9) - 9) = f(f(9 - 9)) = f(0) = f(9)$ したがって、

$$f(Y_9 - Y_{10}) = f\left(\frac{9}{9}\right) = f(1)$$

は 0 にならない。

よって、9 進数の小数 Y_9 が、10 進数の小数 Y_{10} に等しいとは言えない。

したがって、9 進数の小数 Y_9 を 10 進数の小数 Y_{10} で表すことはできない。