

1 有理数の和

有理数の和が、有理数であることを示す。

初項

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{a_0}{b_0}$$

2 項の和

$$\begin{aligned}\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_0}{b_0} &= \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_0}{b_0} \\ \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_0}{b_0} &= \frac{b_0 a_1 + b_1 a_0}{b_1 b_0}\end{aligned}$$

3 項の和

$$\begin{aligned}\frac{a_2}{b_2} + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_0}{b_0} &= \frac{a_2}{b_2} + \frac{b_0 a_1 + b_1 a_0}{b_1 b_0} \\ \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_0}{b_0} &= \frac{a_2 b_1 b_0 + b_2 (a_1 b_0 + b_1 a_0)}{b_2 b_1 b_0} \\ \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_0}{b_0} &= \frac{b_1 b_0 a_2 + b_2 b_0 a_1 + b_2 b_1 a_0}{b_2 b_1 b_0}\end{aligned}$$

4 項の和

$$\begin{aligned}\frac{a_3}{b_3} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_0}{b_0} &= \frac{a_3}{b_3} + \frac{b_1 b_0 a_2 + b_2 b_0 a_1 + b_2 b_1 a_0}{b_2 b_1 b_0} \\ \frac{a_3}{b_3} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_0}{b_0} &= \frac{b_2 b_1 b_0 a_3 + b_3 b_1 b_0 a_2 + b_3 b_2 b_0 a_1 + b_3 b_2 b_1 a_0}{b_3 b_2 b_1 b_0}\end{aligned}$$

5 項の和

$$\frac{a_4}{b_4} + \frac{a_3}{b_3} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_0}{b_0} = \frac{a_4}{b_4} + \frac{b_2 b_1 b_0 a_3 + b_3 b_1 b_0 a_2 + b_3 b_2 b_0 a_1 + b_3 b_2 b_1 a_0}{b_3 b_2 b_1 b_0}$$

$$\frac{a_4}{b_4} + \frac{a_3}{b_3} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_0}{b_0} = \frac{b_3 b_2 b_1 b_0 a_4 + b_4 b_2 b_1 b_0 a_3 + b_4 b_3 b_1 b_0 a_2 + b_4 b_3 b_2 b_0 a_1 + b_4 b_3 b_2 b_1 a_0}{b_4 b_3 b_2 b_1 b_0}$$

$$\frac{a_4}{b_4} + \frac{a_3}{b_3} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_0}{b_0} = \frac{b_4 b_3 b_2 b_1 b_0 \frac{a_4}{b_4} + b_4 b_3 b_2 b_1 b_0 \frac{a_3}{b_3} + b_4 b_3 b_2 b_1 b_0 \frac{a_2}{b_2} + b_4 b_3 b_2 b_1 b_0 \frac{a_1}{b_1} + b_4 b_3 b_2 b_1 b_0 \frac{a_0}{b_0}}{b_4 b_3 b_2 b_1 b_0}$$

よって、 n 項の和は、分母は、 $b_n b_{n-1} b_{n-2} \cdots b_2 b_1 b_0$ で分子は、分母に $\frac{a_j}{b_j}$ をかけたもの
の和になるので、

$$\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{b_k} = \frac{\left\{ \frac{a_0}{b_0} + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \right\} \prod_{k=0}^n b_k}{\prod_{k=0}^n b_k}$$